

Analiza Matematyczna F2 - Lista zadań 1

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczyła, Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania, GiS 2008)

1 Całki niewłaściwe

Zadanie 1. Korzystając z definicji zbieżności całki niewłaściwej I-go rodzaju zbadaj zbieżność podanych całek:

$$a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x^2 + x}, \quad b) \int_1^{\infty} \frac{\sqrt{x} dx}{x + 1}, \quad c) \int_1^{\infty} \arctg x dx, \quad d) \int_{\pi}^{\infty} x \sin x dx, \quad e) \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-x} dx.$$

Zadanie 2. Korzystając z kryterium porównawczego, zbadaj zbieżność podanych całek:

$$a) \int_2^{\infty} \frac{dx}{x(1 + \sqrt{x})}, \quad b) \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + \sqrt{x}}, \quad c) \int_{\pi}^{\infty} \frac{x + \sin x}{x^3} dx, \quad d) \int_2^{\infty} \frac{\sqrt{3} + \sin x}{\sqrt{x} - 1} dx.$$

Zadanie 3. Korzystając z kryterium ilorazowego, zbadaj zbieżność podanych całek:

$$a) \int_2^{\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{x(1 + x)} dx, \quad b) \int_7^{\infty} \frac{x^2}{\sqrt{x^5 - 3}} dx, \quad c) \int_1^{\infty} (e^{\frac{2}{x}} - 1) dx, \quad d) \int_{\pi}^{\infty} \sin^2 \left(\frac{1}{x} \right) dx.$$

Zadanie 4. Korzystając z definicji zbieżności całki niewłaściwej II-go rodzaju zbadaj zbieżność podanych całek:

$$a) \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x + 1)} dx, \quad b) \int_0^e \frac{\ln x}{x}, \quad c) \int_{-1}^0 \frac{1}{x(x + 1)} dx, \quad d) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin x} dx, \quad e) \int_2^9 \frac{3^x}{\sqrt{3^x - 9}} dx.$$

Zadanie 5. Korzystając z kryterium porównawczego, zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych II-go rodzaju:

$$a) \int_0^4 \frac{\arctg x}{\sqrt{x}} dx, \quad b) \int_0^e \frac{e^x}{x^4} dx, \quad c) \int_0^1 \frac{1}{x^2 + \sqrt{x}} dx, \quad d) \int_0^2 \frac{1}{\sqrt{16 - x^4}} dx.$$

Zadanie 6. Korzystając z kryterium ilorazowego, zbadaj zbieżność podanych całek niewłaściwych II-go rodzaju:

$$a) \int_0^1 \frac{1+x^3}{\sqrt{x}(x^2+1)} dx, \quad b) \int_0^\pi \frac{\sin^3 x}{x^4} dx, \quad c) \int_0^1 \frac{e^x-1}{\sqrt{x^5}} dx, \quad d) \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \frac{1}{\sqrt{\sin x}} dx, \quad e) \int_1^2 \frac{1}{x^2-\sqrt{x}} dx.$$