# Analiza Matematyczna F2 - Lista zadań 2

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania, GiS 2008)

## 2 Szeregi

**Zadanie 1**. Wyznacz sumy częściowe podanych szeregów i zbadaj ich zbieżność:

$$a) \sum_{n\geq 0}\left(\frac{3}{5}\right)^n,\ b) \sum_{n\geq 0}\frac{n-1}{n!},\ c) \sum_{n\geq 0}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},\ d) \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+1)},\ e) \sum_{n\geq 1}\frac{1}{n(n+2)}.$$

**Zadanie 2**. Korzystając z kryterium porównawczgo, zbadaj zbieżność podanych szeregów:

$$a) \sum_{n\geq 1}\frac{n+1}{3n^3+2},\ b) \sum_{n\geq 1}\frac{\sqrt{n^2+1}}{n^2+2},\ c) \sum_{n\geq 1}\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right),\ d) \sum_{n\geq 1}\cos\left(\frac{1}{n+2}\right),\ e) \sum_{n\geq 1}\frac{2^n+1}{n2^n+n^2}.$$

**Zadanie 3**. Korzystając z kryterium ilorazowego, zbadaj zbieżność podanych szeregów:

$$a) \sum_{n\geq 2}\frac{n^2+1}{\sqrt{n^8-2}},\ b) \sum_{n\geq 1}\frac{3^n-1}{2^n-3},\ c) \sum_{n\geq 1}e^n\sin\left(\frac{1}{4^n}\right).$$

**Zadanie 4**. Korzystając z kryterium d'Alamberta zbadaj zbieżność szeregów:

$$a) \sum_{n\geq 1}\frac{2^n+1}{n^3+1},\ b) \sum_{n\geq 1}n^3\sin\frac{\pi}{2^n},\ c) \sum_{n\geq 1}\frac{n!}{n^n},\ d) \sum_{n\geq 1}\frac{(n!)^2}{(2n)!},\ e) \sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{\pi^n n!}.$$

**Zadanie 5**. Korzystając z kryterium Cauchy'ego zbadaj zbieżność szeregów:

$$a) \sum_{n\geq 1}\frac{(n+1)^2 n}{(2n^3+1)^n},\ b) \sum_{n\geq 1}\frac{2^n+5^n}{3^n+7^n},\ c) \sum_{n\geq 1}\frac{2^n n^{n^2}}{(n+1)^n},\ d) \sum_{n\geq 1}\arccos^n\frac{1}{n^2},\ e) \sum_{n\geq 1}\frac{n^n}{(5+n)^n}.$$

**Zadanie 6**. Korzystając z kryterium Leibniza zbadaj zbieżność szeregów:

$$a) \sum_{n\geq 1}(-1)^n\frac{2^n}{3^n+9^n},\ b) \sum_{n\geq 3}(-1)^n\sin\frac{\pi}{(n+1)^n},\ c) \sum_{n\geq 1}(-1)\frac{3^n}{n!},\ d) \sum_{n\geq 1}(-1)^n\arcsin^n\frac{1}{n^3}.$$

**Zadanie 7**. Zbadaj zbieżność bezwzględną szeregów:

$$a)\ \sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{1}{e^n+1},\ b)\ \sum_{n>0}(-1)^n\frac{\sqrt{n}}{n+2},\ c)\ \sum_{n>0}\left(\frac{-2n}{5n+6}\right)^n,\ d)\ \sum_{n>0}(-1)^n(\sqrt[n]{2}-1).$$

**Zadanie 8**. Wyznacz przedział i promień zbieżności zadanych szergów potęgowych:

$$a)\ \sum_{n\geq 0}\frac{x^n}{ne^n},\ b)\ \sum_{n>0}\frac{(x+3)^n}{n!},\ c)\ \sum_{n>0}(5x-10)^n,\ d)\ \sum_{n>0}\frac{\sqrt{n}(x+1)^n}{n+1}.$$

**Zadanie 9**. Wyznacz szeregi Maclaurina dla podanych funkcji:

$$a)\ x^2e^{-x^2},\ b)\ \frac{x+1}{3x+2},\ c)\ \cos\frac{x}{3},\ d)\ \frac{x+1}{(x-1)(x+3)},\ e)\ \sinh(2x),\ f)\ \sin^2(2x).$$

**Zadanie 10**. Stosując rozwinięcie Maclaurina odpowiednich funkcji elementarnych wyznacz:

$$a)\ f^{(101)}(0),\ f(x)=\sin x,\ b)\ f^{(2016)}(0),\ f(x)=x^2e^x,$$

$$c)\ f^{(666)}(0),\ f(x)=x\sin^2(3x),\ d)\ f^{(123)}(0),\ f(x)=\frac{x}{1+x^2}.$$

**Zadanie 11**. Dla zadanych funkcji wyznacz szereg potęgowy $f'(x)$ oraz $\int_0^x f(t)dt$:

$$a)\ f(x)=\frac{1}{x^5+1},\quad b)\ f(x)=\cos(x^2),\quad c)\ f(x)=e^{-x^2},\quad d)\ f(x)=\frac{x}{(x-1)(x-3)}.$$

**Zadanie 12**. Różniczkując lub całkując odpowiednie szeregi potęgowe oblicz:

$$a)\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+1)2^n},\quad b)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{2^n},\quad c)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{2^n}.$$