Analiza Matematyczna F2 dla Fizyków na WPPT
Lista zadań 4

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania, GiS 2008)

4 Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych

Zadanie 1. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych funkcji we wskazanych punktach:

$$a)\ \ f(x,y)=\begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla } xy=0, \\ 1 & \text{dla } x\neq 0, \end{cases} \quad (x_0,y_0)=(0,0),$$

$$b)\ \ f(x,y,z)=\sqrt[3]{xy(x-1)},\ \ (x_0,y_0,z_0)=(0,0,1),$$

$$c)\ \ f(x,y)=\begin{cases} x & \text{dla } y=0, \\ y^2 & \text{dla } x=0, \\ 1 & \text{w pozostałych punktach,} \end{cases} \qquad (x_0,y_0)=(0,0).$$

Zadanie 2. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji:

$a)$ $f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{1-xy}{x+y}$, $b)$ $f(x,y,z)=\frac{x}{x^2+y^2+z^2}$,

$c)$ $f(x,y)=e^{\sin\frac{y}{x}}$, $d)$ $f(x,y,z)=\sin(x\cos(y\sin x))$.

Zadanie 3. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji i sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe:

$a)$ $f(x,y)=\sin(x^2+y^2)$, $b)$ $f(x,y)=xe^{xy}$,
$c)$ $f(x,y,z)=\ln(x^2+y^4+z^6+1)$, $d)$ $f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$.

Zadanie 4. Zbadać, czy równość $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ jest prawdziwa dla funkcji:

$$a)\ \ f(x,y)=\begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad b)\ \ f(x,y)=\sqrt[3]{x^6-8y^3}.$$

Zadanie 5. Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe podanych funkcji:

$a)\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2},\ \ f(x,y) = \sin xy,\qquad b)\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x \partial y},\ \ f(x,y) = \frac{x+y}{x-y},$

$c)\ \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z},\ \ f(x,y,z) = \frac{x^2y^3}{z},\quad d)\ \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2},\ \ f(x,y,z) = e^{xy+z},$

Zadanie 6. Funkcja $f(x,y)$ jest różniczkowalna w punkcie (x_0,y_0), jeśli

$$\lim_{\Delta x, \Delta_y \to 0} \frac{f(x,y) - (f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

inaczej

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)\Delta x + f_y(x_0,y_0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach:

$a)\ f(x,y) = \sqrt[3]{xy},\ \ (x_0,y_0) = (0,0),$

$b)\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0), \end{cases}\quad (x_0,y_0) = (0,0)$

$c)\ f(x,y,z) = \sqrt{x^4+y^4+z^4},\ \ (x_0,y_0,z_0) = (0,0,0).$

Zadanie 7. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

$a)\ z = \frac{\arcsin x}{\arcsin y},\ \ (x_0,y_0,z_0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right),$

$b)\ z = x^y,\ \ (x_0,y_0,z_0) = (2,4,16),$

Zadanie 8. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

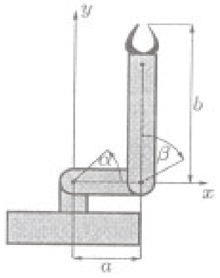
$a)\ (1.02)^3 \cdot (0.997)^2,\quad b)\ \sqrt[3]{(2.93)^3 + (4.05)^3 + (4.99)^3},$

Zadanie 9.

a) Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością ± 1mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego stożka?

b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$m, $b = 4$m, $c = 12$m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2cm.

c) Robot do zgrzewania karoserii samochodowych składa się z dwóch przegubowych ramion o długości $a = 1$m, $b = 2$m (rysunek).



Położenie zgrzewarki jest określone przez kąty $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$. Obliczyć w przybliżeniu dokładność jej położenia, jeżeli kąty odchylenia ramion ustawione są z dokładnością $\Delta_\alpha = \Delta_\beta = 0,003\text{rd}$.

Zadanie 10. Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem x i y podanych funkcji:

$a)$ $z = f(u,v) = \ln \frac{u}{v+1}$, $u = x \sin y$, $v = x \cos y$,
$b)$ $z = f(u,v,w) = \arcsin \frac{u}{v+w}$, gdzie $u = e^{\frac{x}{y}}$, $v = x^2 + y^2$, $w = 2xy$.

Zadanie 11. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

$a)$ $f(x,y) = 2|x| + |y|$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
$b)$ $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1,0)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

Zadanie 12. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

$a)$ $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (-3,4)$, $\vec{v} = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$
$f(x,y,z) = e^{xyz}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1,1,-1)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Zadanie 13. Napisać wzór Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów, jeżeli

$a)$ $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $n = 2$,
$b)$ $f(x,y) = (x+y)^3$, $(x_0, y_0) = (-1,1)$, $n = 4$.

Zadanie 14. Zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne

$a)$ $f(x,y) = 2|x| + 3|y|$, $b)$ $f(x,y) = 2x^4 - 3y^7$.

Zadanie 15. Znaleźć ekstrema podanych funkcji:

$a)$ $f(x,y) = 3(x-1)^2 + 4(y+2)^2$, $b)$ $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
$c)$ $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$, $d)$ $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$,
$e)$ $f(x,y) = xy^2(12 - x - y)$, $f)$ $f(x,y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

Zadanie 16. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad |x| + |y| \leq 2,$

b) $f(x,y) = xy^2 + 4xy - 4x, \quad -3 \leq x \leq 3, \quad -3 \leq y \leq 0,$

c) $f(x,y) = x^4 + y^4, \quad x^2 + y^2 \leq 9,$

d) $f(x,y) = \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^2+y^2+2}, \quad \mathbb{R}.$

Zadanie 17.

a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1,5)$, $B = (1,4)$, $C = (2,-3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.

b) Jakie powinny być długość a, szerokość b i wysokość h prostopadłościennej otwartej wanny o pojemności V, aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?

c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k: \begin{cases} x + y - 1 & = 0, \\ z + 1 & = 0, \end{cases} \qquad l: \begin{cases} x - y + 3 & = 0, \\ z - 2 & = 0, \end{cases}$$

d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\text{m}^3$. Do budowy magazynu używane są płyty w cenie 30zł/m^2, do budowy podłogi w cenie 40zł/m^2, a sufitu w cenie 20zł/m^2. Znaleźć długość a, szerokość b i wysokość c magazynu, ktorego koszt budowy będzie najmniejszy.

e) Wśród trójkątów wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole.

f) Na trzech parami skośnych krawędziach sześcianu (rysunek) wyznaczyć po jednym punkcie w ten sposób, aby pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach było najmniejsze.

Zadanie 18. Zbadać, czy podane równania określają jednoznacznie ciagłe funkcje uwikłane $y = y(x)$ na pewnych otoczeniach zadanych punktów:

a) $x^y - y^x = 0$, *i*) $A = (2,4)$, *ii*) $B = (e,e)$, *iii*) $C = (3,3)$,
b) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 0$, *i*) $A = (0,0)$, *ii*) $B = (1,1)$, *iii*) $C = (-1,1)$.

Zadanie 19. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:

a) $x^3 + x - y^3 = 0, \quad (2,2)$, *b*) $x^2 + y^2 - 3xy + x = 0, \quad (1,1)$.

Zadanie 20. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

a) $xe^y - y + 1 = 0$, *b*) $x^2 + y^2 - 3xy = 0$, *c*) $x - y = \sin x - \sin y$.

Zadanie 21. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych postaci $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

a) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0$, *b*) $(x-y)^2 = y + xy - 3x$.