

Uzasadnienie, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$$

Wybieramy n_0 takie, że $a^2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dla $n > n_0$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ - część całkowita liczby). Wtedy zachodzi

$$a^2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, a^2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2, a^2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3, \dots, a^2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor.$$

Zauważamy, że

$$(1) \quad a^n \leq a \cdot (a^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < a \cdot \underbrace{\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3 \right) \cdot \dots \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right)}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ czynników}}.$$

Dla wyrażenia po prawej stronie zachodzi nierówność

$$(2) \quad \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3 \right) \cdot \dots \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) \leq$$

$$\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3 \right) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n;$$

(równość, gdy n jest parzyste i nierówność, gdy n jest nieparzyste)

Stąd

$$a^n \leq a \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3 \right) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Ostatecznie

$$\frac{n!}{a^n} = \left(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor - 1 \right) \cdot \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right) \cdot$$

$$\left(\left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 \right) \cdot \left(\lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 3 \right) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n \right) \cdot \frac{1}{a^n} \geq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \frac{1}{a}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lfloor \frac{n}{2} \rfloor! \cdot \frac{1}{a} = \infty,$$

wnioskujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty.$$