

Analiza Matematyczna F1. Lista zadań 3, 2023/24z

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania, GiS 2008)

3 Granica funkcji

Zadanie 1. . Korzystając z definicji Heinego granicy właściwej funkcji uzasadnić podane równości:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 3} (x-2)^5 = 1, & b) \lim_{x \rightarrow 1} (3+2x^3) = 5, \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0 & d) \lim_{x \rightarrow \pi} [x] = -4, \\ e) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{sign}(\cos x) = -1, & f) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[x]}{x} = 1, \\ g) \lim_{x \rightarrow -3^-} \sqrt{x^2-3} = 0 & h) \lim_{x \rightarrow 2^-} \sqrt{4-x^2}, \\ i) \lim_{x \rightarrow \infty} (3^{-x} + 1) = 1, & j) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-2x^3}{x^3+1} = -2. \end{array}$$
$$\operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{jeśli } x < 0 \\ 0 & \text{jeśli } x = 0, \\ 1 & \text{jeśli } x > 0 \end{cases}, \quad [x] - \text{część całkowita liczby } x$$

Zadanie 2. . Korzystając z definicji Heinego granicy niewłaściwej funkcji uzasadnić podane równości:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1}{x-2} = \infty, & b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+3}{|x^2+2x-3|} = \infty, \\ c) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{(x-1)^7} = -\infty, & d) \lim_{x \rightarrow \infty} (5-x^7) = -\infty. \end{array}$$

Zadanie 3. .

- a) W ostrosłupie trójkątnym prawidłowym krawędź podstawy ma długość b , a kąt nachylenia krawędzi bocznej do podstawy ma miarę x , gdzie $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Niech $r(x)$ oznacza promień kuli wpisanej w ten ostrosłup. Obliczyć granice $\lim_{x \rightarrow 0^+} r(x)$, $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} r(x)$. Czy można podać te granice nie wyznaczając funkcji r ?
- b) Cząstka pewnego układu drgającego porusza się po osi Ox . Położenie tej cząstki w chwili $t > 0$ jest opisane wzorem $x(t) = 5 - 4^{-3t} \cdot \cos(2t + 1)$. Znaleźć jej graniczne położenie, gdy $t \rightarrow \infty$. Co oznacza otrzymany wynik?
- c) Równanie $ax^4 - 2x - 8 = 0$ ma dla parametru $a > 0$ dwa pierwiastki rzeczywiste $x_1(a)$, $x_2(a)$. Obliczyć granice $\lim_{a \rightarrow 0^+} x_1(a)$, $\lim_{a \rightarrow 0^+} x_2(a)$, $\lim_{a \rightarrow \infty} x_1(a)$, $\lim_{a \rightarrow \infty} x_2(a)$.

Wskazówka. Narysować wykresy funkcji $y = ax^4$ oraz $y = 2x + 8$. Następnie zbadać położenie punktów wspólnych obu wykresów, gdy $a \rightarrow 0^+$ oraz, gdy $a \rightarrow \infty$.

Zadanie 4. . Uzasadnić, że podane granice funkcji nie istnieją:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2}{x-3}, & b) \lim_{x \rightarrow 2} [x^2], \\ c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{4-x^2}, & d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sin \sqrt{x}, \\ e) \lim_{x \rightarrow 0^-} \cos \frac{1}{x^2}, & f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sign} x}{\operatorname{sign}(x+1)}. \end{array}$$

Zadanie 5. . Obliczając granice jednostronne zbadać czy istnieją podane granice funkcji:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{sign} x, & b) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x^2}}, \\ c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|^3}{x^3-x^2}, & d) \lim_{x \rightarrow -1} \operatorname{sign}(x(1-x^2)), \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{|x|}, & f) \lim_{x \rightarrow 0} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}. \end{array}$$

Zadanie 6. . Obliczyć podane granice:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x^4-1}, & b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x+1}{3^x+2}, \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{2x}, & d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^6-1}{1-x^2}, \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{1-\cos x}, & f) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left(\operatorname{tg} x - \frac{1}{\cos x} \right). \end{array}$$

Zadanie 7. . Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnić podane równości:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0, & b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x\sqrt{8}|}{|x\sqrt{2}|} = 2, \\ c) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2} = 0, & d) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2+\sin x}{x^2} = 0, \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \left[\frac{1}{x} \right] = 0, & f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sin \left(x + \frac{1}{x} \right) - \sin x \right) = 0. \end{array}$$

Zadanie 8. . Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych funkcji obliczyć podane granice:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^3 + 2x^2 + x - 100), & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x + 1), \\ c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} \right), & d) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x+2}{x^2+2x+1}, \\ e) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}), & f) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2+2} - x \right). \end{array}$$

Zadanie 9. . Korzystając z twierdzenia o dwóch funkcjach uzasadnić podane równości:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{[x^2+1]}{[x]} = \infty, & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2+\sin \frac{1}{x}}{x^2} = \infty, \\ c) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(3 - \cos \frac{1}{x} \right) \operatorname{ctg} x = -\infty, & d) \lim_{x \rightarrow \infty} (x^5 - \sin x) = \infty, \\ e) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2x-\sin x} = \infty, & f) \lim_{x \rightarrow \infty} 2^x (2 + \cos x) = \infty. \end{array}$$

Zadanie 10. . Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice funkcji:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2}, & b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{3^x}, \\ c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 5x}{\cos 3x}, & d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x}-1}{\sin 2x}, \\ e) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x^3 \sin x^7}{\sin x^4 \sin x^6}, & f) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\operatorname{tg} 3x}{x^3}, \\ g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{x}, & h) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x+2} \right)^{2x-1}, \\ i)^* \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2+e^{3x})}{\ln(3+e^{2x})}, & j)^* \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln x^3-3}{x-e}. \end{array}$$