

Analiza Matematyczna. Lista zadań 3a, 2023/24z

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania, GiS 2008)

3 Granica funkcji, cd.

Zadanie 1. Znaleźć asymptoty pionowe i ukośne podanych funkcji:

$$\begin{array}{ll} a) u(x) = \frac{x^3+x^2}{x^2-4}, & b) v(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}, \\ c) w(x) = \frac{\sin x}{x-\pi}, & d) z(x) = \frac{\cos(\pi x)}{2x-8}, \\ e) f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}, & f) g(x) = \frac{x^3}{(x+1)^2}, \\ g) h(x) = x - \operatorname{arctg} x, & h) p(x) = \frac{1}{e^x-1}, \\ i) q(x) = \frac{1-x^2}{x+1}, & j) r(x) = \frac{\sin^2 x}{x^3}. \end{array}$$

Prosta $x = x_0$ jest asymptotą pionową wykresu funkcji $y = f(x)$, jeśli ma miejsce co najmniej jeden warunek

$$\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty \text{ } (-\infty) \quad \text{lub} \quad \lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty \text{ } (-\infty)$$

Prosta $y = ax + b$ jest asymptotą ukośną wykresu funkcji $y = f(x)$ w ∞ , jeśli istnieją następujące granice

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax].$$

Analogicznie określamy asymptotę w $-\infty$. Jeśli $a = 0$, to asymptotę $y = b$ nazywamy asymptotą poziomą.

Zadanie 2. Narysować przykłady wykresów funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

- a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} u(x) = 1$, $u(2) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} u(x) = -1$,
- b) prosta $y = x + 1$ jest asymptotą ukośną funkcji z w $-\infty$, prosta $y = x - 1$ asymptotą ukośną w ∞ , a prosta $x = 0$ jest jej asymptotą pionową obustronną,
- c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 0-} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0+} g(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 5$,
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -4$, $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 4$,
- e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} q(x) = 4$, $\lim_{x \rightarrow 1} q(x) = \infty$, funkcja q jest nieparzysta,
- f) $\lim_{x \rightarrow 0-} r(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (r(x) - x) = -1$, funkcja r jest parzysta.

Zadanie 3. Korzystając z definicji Heinego uzasadnić ciągłość podanych funkcji na $\mathbb{R}$:

$$\begin{array}{ll} a) u(x) = \frac{x^2}{x^2+2} & b) v(x) = \sin^2 x, \\ c) f(x) = 2x - 5 & d) g(x) = \sin x, \\ e) r(x) = \sqrt{x^4+1} \cos x. \end{array}$$

Zadanie 4. Wyznaczyć zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

$$\begin{aligned} a) \quad u(x) &= (x^3 - x) [x], & b) \quad v(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x = 0 \text{ lub } \pi \\ \frac{\pi \sin x}{x(x-\pi)} & \text{dla } x \neq 0 \text{ i } \pi, \end{cases} \\ c) \quad g(x) &= [x] (x - 1), & d) \quad f(x) &= \begin{cases} 1 & \text{dla } x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{\sin x} & \text{dla } x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}, \end{cases} \\ e) \quad p(x) &= \operatorname{sign}(x^2) \cos \frac{\pi}{2}x, & f) \quad h(x) &= \begin{cases} \text{dla } x \leq 0 \\ \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2} & \text{dla } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zadanie 5. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były ciągłe we wskazanych punktach:

$$\begin{aligned} a) \quad u(x) &= \begin{cases} \sin x & \text{dla } |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ ax + b & \text{dla } |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases} & b) \quad v(x) &= \begin{cases} 2 & \text{dla } x \leq 0 \\ a^x + b & \text{dla } 0 < x < 1 \\ 3 & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \\ x_1 &= -\frac{\pi}{2}, \quad x_2 = \frac{\pi}{2}, & x_1 &= 0, \quad x_2 = 1, \\ c) \quad f(x) &= \begin{cases} bx & \text{dla } x < \pi, \\ \frac{\sin x}{ax} & \text{dla } x \geq \pi \end{cases} & d) \quad g(x) &= \begin{cases} bx + 3 & \text{dla } x < 1 \\ 2x^2 + x + a & \text{dla } x \geq 1 \end{cases} \\ x_0 &= \pi, & x_0 &= 1, \\ e) \quad h(x) &= \begin{cases} (x-1)^3 & \text{dla } x \leq 0, \\ ax + b & \text{dla } 0 \leq x < 1, \\ \sqrt{x} & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} & f) \quad g(x) &= \begin{cases} x & \text{dla } |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b & \text{dla } x > 1, \end{cases} \\ x_1 &= 0, \quad x_2 = 1; & x_1 &= -1, \quad x_2 = 1. \end{aligned}$$

Zadanie 6. Uzasadnić ciągłość podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

$$\begin{aligned} a) \quad u(x) &= e^x \cos x, \quad \mathbb{R}; & b) \quad v(x) &= \frac{1}{\sqrt{16-x^4}}, \quad (-2, 2); \\ c) \quad w(x) &= \arctg \sqrt{x}, \quad [0, \infty); & d) \quad z(x) &= \sqrt{\sin x}, \quad \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi]; \\ e) \quad f(x) &= \frac{x}{|x|+1}, \quad \mathbb{R}; & f) \quad g(x) &= \sqrt{e^x + x^2}, \quad \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Zadanie 7. Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji:

$$\begin{aligned} a) \quad u(x) &= \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x \in (0, 1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{dla } x = 1, \end{cases} & b) \quad v(x) &= \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1} & \text{dla } x \neq 0, \\ e & \text{dla } x = 0, \end{cases} ; \\ x_0 &= 1; & x_0 &= 0 \\ c) \quad f(x) &= \operatorname{sign}[x(x-1)], \quad x_0 = 1 & d) \quad g(x) &= \begin{cases} x \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0, \end{cases} . \\ & & x_0 &= 0; \end{aligned}$$

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów uzasadnić, że podane zagadnienia ekstremalne mają rozwiązania:

1. wśród stożków wpisanych w kulę o promieniu r istnieje ten, który ma największą objętość;
2. wśród prostokątów opisanych na danej elipsie istnieje ten, który ma najmniejsze i największe pole;

3. wśród graniastosłupów prawidłowych o podstawie sześciokątnej wpisanych w kulę o promieniu r istnieje ten, który ma największą objętość;

Zadanie 9. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

- a) $x^3 + 6x - 2 = 0$, $(0, 1)$; b) $x \sin x = 7$, $(2\pi, \frac{5\pi}{2})$;
c) $1 = \frac{\sin x}{2} + x$, $(0, \frac{\pi}{2})$; d) $\arctg x = \frac{1}{x^2}$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$;
e) $x^{100} + x - 1 = 0$ $(\frac{1}{2}, 1)$; f) $x^{2^x} = 1$, $(0, 1)$;

Zadanie 10. Korzystając z twierdzenia Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich uzasadnić następujące stwierdzenia:

1. na każdym szlaku turystycznym wiodącym z Karpacza (800 m nad poziomem morza) na Snieżkę (1602 m nad poziomem morza) jest miejsce, które wznosi się 1000 m nad poziomem morza;
2. na dowolnej figurze wypukłej na płaszczyźnie można opisać kwadrat;
3. jeżeli zegar o północy spóźniał się o 5 min. a po nakręceniu, ale bez przestawiania wskazówek, następnego dnia o północy spieszył się o 10 min, to w pewnej chwili wskazywał właściwy czas;