

Analiza Matematyczna F1 dla Fizyków na WPPT

Lista zadań 4, 2023/24z

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania, GiS 2008)

4 Pochodne funkcji

Zadanie 1. Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$a) w(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 2, \\ 2^x & \text{dla } x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2; \quad b) z(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{dla } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

Zadanie 2. Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$\begin{array}{ll} a) u(x) = \frac{1}{x+1}, \text{ gdzie } x \neq -1; & b) v(x) = \sqrt{x}, \text{ gdzie } x > 0; \\ c) h(x) = 4^x, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}; & d) p(x) = \sin \frac{1}{x}, \text{ gdzie } x \neq 0; \\ e) q(x) = \operatorname{ctg} x, \text{ gdzie } x \neq k\pi \text{ dla } k \in \mathbb{Z}; & f) r(x) = \frac{1}{x^2+1}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

Zadanie 3. Napisac równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \arcsin \frac{x}{2}, (1, f(1)); & b) f(x) = \ln(x^2 + e), (0, f(0)); \\ c) f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, (\sqrt{2}, f(\sqrt{2})); & d) f(x) = \operatorname{arctg} x^2, (0, f(0)); \end{array}$$

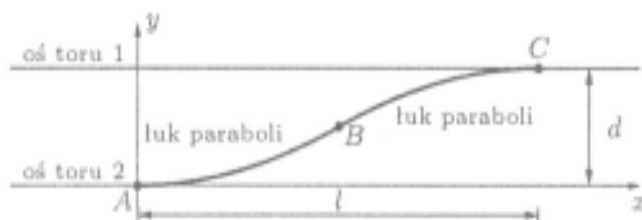
Zadanie 4.

1. Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy podanych funkcji:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^2, g(x) = \sqrt[3]{x}, cx > 0; & b) f(x) = 4 - x, g(x) = 4 - \frac{x^2}{2}, x > 0; \\ c) f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sqrt{x}, x > 0; & d) f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \operatorname{ctg} x, 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

2. Dla jakich wartości parametru $a \in \mathbb{R}$, wykresy funkcji $y = e^{ax}$, $y = e^{-x}$ przetną się pod kątem prostym?

Zadanie 5. Tory kolejowe biegnące równolegle trzeba połączyć rozjazdem składającym się z dwóch jednakowych łuków parabol (rysunek). Odległość między osiami torów wynosi $d = 8\text{m}$, a rozjazd ma mieć długość $l = 40\text{m}$. Należy go zaprojektować w ten sposób, aby ruch pociągów przebiegał w sposób gładki, tzn. aby w punktach A, B, C istniały styczne do krzywych rozjazdu. Podać równania łuków parabol w układzie współrzędnych



Zadanie 6. Gumowy balon ma kształt kuli o objętości $V_0 = 40 \text{ m}^3$. Do balonu wciąga się powietrze z prędkością $p = 1 \text{ m}^3/\text{s}$. Obliczyć, z jaką prędkością powiększać się będzie średnica balonu po 24 s. Założyć, że ciśnienie powietrza w balonie jest stałe.

Zadanie 7. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{aligned} a) \quad w(x) &= |\operatorname{ctg}^3 x|, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}; & b) \quad z(x) &= \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ \sin x & \text{dla } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x_0 = 1; \\ c) \quad f(x) &= |x^5|, \quad x_0 = 0; & d) \quad g(x) &= \begin{cases} \frac{x(x-1)}{2} & \text{dla } x < 1, \\ \sqrt{x} - 1 & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1; \end{aligned}$$

Zadanie 8. Znaleźć parametry a, b, c , dla których podane funkcje mają pochodne na $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a) \quad u(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \leq 0, \\ a \sin x + b \cos x & \text{dla } x > 0; \end{cases} & b) \quad v(x) &= \begin{cases} ae^x + e^{-x} & \text{dla } x < 0, \\ chx & \text{dla } x \geq 0; \end{cases} \\ c) \quad f(x) &= \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ a \sin x + b \cos x + c & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 & \text{dla } x > \pi; \end{cases} & d) \quad g(x) &= \begin{cases} ae^x + b & \text{dla } x \leq 0, \\ 2-x & \text{dla } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Zadanie 9. Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe w punkcie $x_0 = 0$:

$$\begin{aligned} a) \quad u(x) &= 3 - \sqrt[5]{x}; & b) \quad v(x) &= \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}; \\ c) \quad w(x) &= \sqrt{|\sin x|}; & d) \quad f(x) &= \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}; \end{aligned}$$

Zadanie 10. Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$\begin{aligned} a) \quad y &= \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) e^x; & b) \quad y &= \frac{\sin x}{x^4 + 4}; \\ c) \quad y &= \sqrt[3]{\arcsin(x^3)}; & d) \quad y &= x^{\operatorname{tg} x}; \\ e) \quad y &= \frac{\arcsin x}{e^x}; & f) \quad y &= (1 + \sqrt[4]{x}) \operatorname{tg}(\sqrt{x}); \\ g) \quad y &= \sqrt[3]{x}; & h) \quad y &= \frac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}. \end{aligned}$$

Zadanie 11. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć $(f^{-1})'(y)$ dla:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= 3^{-x}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}; & b) \quad f(x) &= \cos x, \text{ gdzie } 0 < x < \pi; \\ c) \quad f(x) &= \operatorname{tgh} x, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}; & d) \quad f(x) &= \ln x, \text{ gdzie } x > 0; \end{aligned}$$

Zadanie 12. Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć:

$$\begin{aligned} a) \quad (f^{-1})'(e+1), & \text{ gdzie } f(x) = x + \ln x; & b) \quad (g^{-1})'(1), & \text{ gdzie } g(x) = \cos x - 3x; \\ c) \quad (h^{-1})'(3), & \text{ gdzie } h(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}; & d) \quad (k^{-1})'(4), & \text{ gdzie } k(x) = x^3 + 3^x. \end{aligned}$$

Zadanie 13. Zakładając, że funkcje f i g mają pochodne właściwe na wspólnym przedziale, obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$\begin{aligned} a) \quad y &= f(x) \cos g(x); & b) \quad y &= e^{\frac{f(x)}{g(x)}}; \\ c) \quad y &= \operatorname{arctg}[f(x)g(x)]; & d) \quad y &= \ln(f(x)^{g(x)} + 1); \\ e) \quad y &= \sin[f(x)g(x)]; & f) \quad y &= [f(x)]^{g(x)}; \\ g) \quad y &= \operatorname{tg} \frac{f(x)}{g(x)}; & h) \quad y &= f(x) \operatorname{arc} \operatorname{tg} g(x). \end{aligned}$$

Zadanie 14. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

- a) $\sqrt[3]{7.999}$; b) $e^{0.04}$; c) $\ln \frac{2001}{2000}$;
d) $\arcsin 0.51$; e) $e^{-0.07}$; f) $\ln 0.9993$.

Zadanie 15. Fragment terenu ma kształt trójkąta równoramiennego o boku $b = 200$ m. Kąt przy wierzchołku tego trójkąta, zmierzony z dokładnością 0.001 rad wynosi $\frac{\pi}{3}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego terenu?

Zadanie 16. Obliczyć f' , f'' , f''' podanych funkcji:

- a) $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$; b) $f(x) = x \sin x$;
c) $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$; d) $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

Zadanie 17. Z badać, czy istnieje $f^{(n)}(x_0)$ dla podanych funkcji i punktów:

- a) $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ x^3 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$ b) $f(x) = \begin{cases} x^4 \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$
 $x_0 = 0, n = 2$; $x_0 = 0, n = 3$.

Zadanie 18. Punkt materialny porusza się po krzywej $y = 2^x$ w ten sposób, że jego rzut na oś Ox ma stałą prędkość $v_x = 3$. Z jaką prędkością (w kierunku osi Oy) porusza się ten punkt w chwili, gdy jest na wysokości 4?

Zadanie 19. Położenie cząstki w chwili t opisuje wektor wodzący $\vec{r} = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$. Znaleźć przyspieszenie cząstki w chwili, gdy wektor prędkości miał długość $\sqrt{3}$.

Zadanie 20. Sprawdzić, czy podane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale $[-1, 1]$. Narysować wykresy tych funkcji.

- a) $u(x) = \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$ b) $v(x) = 1 - |x|$;
c) $w(x) = \arcsin |x|$; d) $z(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{\pi}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$

Zadanie 21. Zastosować twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji na wskazanych przedziałach. Wyznaczyć odpowiednie punkty:

- a) $u(x) = e^x, [0, 2]$, b) $v(x) = x^3 + x, [-1, 1]$,
c) $w(x) = \arctg x, [-1, \sqrt{3}]$, d) $z(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x, [0, 1]$

Zadanie 22. Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:

- a) $|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|$, dla $a, b \in \mathbb{R}$, b) $\ln \frac{b}{a} < b - a$ dla $1 \leq a < b$,
c) $x \leq \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ dla $0 \leq x < 1$, d) $e^x > ex$ dla $x > 1$,

Zadanie 23. Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:

- a) $u(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$, b) $v(x) = e^x(x+1)$,
c) $w(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$, d) $z(x) = x \ln^2 x$,
e) $q(x) = 4x + \frac{1}{x}$, f) $r(x) = \frac{1}{x \ln x}$.

Zadanie 24. Narysować przykładowe wykresy funkcji $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, które spełniają wszystkie podane warunki:

- a) $f'(x) > 0$ dla $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$, $f'(x) \leq 0$ dla $x \in (1, 4)$, ale $f'(1)$, $f'(4)$ nie istnieją,
 b) $f'(x) > 0$ dla każdego $x < 1$, $f'(x) < 0$ dla każdego $x > 1$, $f'_-(1) = 1$, $f'_+(1) = -\frac{1}{2}$, $f(1) = 2$,
 c) $f'(x) > 0$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$,

Na rysunkach zaznaczyć fragmenty wykresów, które spełniają poszczególne warunki.

Zadanie 25. Uzasadnić podane tożsamości:

- a) $\arccot x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$ dla $x \in \mathbb{R}$,
 b) $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan x$ dla $x \in (-1, 1)$,

Zadanie 26. Korzystając z reguły de l'Hospitala obliczyć podane granice:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x+1)}{x}$, b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin \frac{\pi}{2}x}{\ln x}$,
 c) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$, d) $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arccot x$,
 e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$, f) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$,
 g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$, h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$
 i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$, j) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$,

Zadanie 27. Obliczyć podane granice. Czy można tu zastosować regułę de l'Hospitala?

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}$, b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos 3x}{x - \cos 2x}$, c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - \sin x}{2^x + \cos x}$.