

# Analiza Matematyczna

## Lista zadań 4, 2023/24z

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania, GiS 2008)

### 4 Pochodne funkcji

**Zadanie 1.** Korzystając z definicji zbadać, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$a) w(x) = \begin{cases} x^2 & \text{dla } x \leq 2, \\ 2^x & \text{dla } x > 2, \end{cases} \quad x_0 = 2; \quad b) z(x) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1 & \text{dla } x > \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x_0 = \frac{\pi}{2};$$

**Zadanie 2.** Korzystając z definicji obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$\begin{array}{ll} a) u(x) = \frac{1}{x+1}, \text{ gdzie } x \neq -1; & b) v(x) = \sqrt{x}, \text{ gdzie } x > 0; \\ c) h(x) = 4^x, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}; & d) p(x) = \sin \frac{1}{x}, \text{ gdzie } x \neq 0; \\ e) q(x) = \operatorname{ctg} x, \text{ gdzie } x \neq k\pi \text{ dla } k \in \mathbb{Z}; & f) r(x) = \frac{1}{x^2+1}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}. \end{array}$$

**Zadanie 3.** Napisac równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \arcsin \frac{x}{2}, (1, f(1)); & b) f(x) = \ln(x^2 + e), (0, f(0)); \\ c) f(x) = \frac{2x}{1+x^2}, (\sqrt{2}, f(\sqrt{2})); & d) f(x) = \arctg x^2, (0, f(0)); \end{array}$$

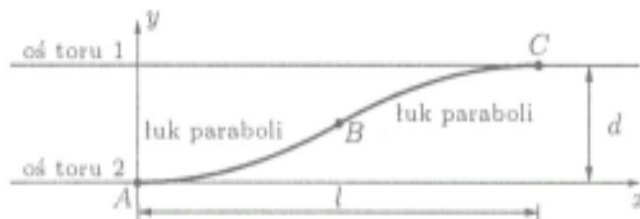
**Zadanie 4.**

1. Obliczyć kąty, pod jakimi przecinają się wykresy podanych funkcji:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^2, g(x) = \sqrt[3]{x}, cx > 0; & b) f(x) = 4 - x, g(x) = 4 - \frac{x^2}{2}, x > 0; \\ c) f(x) = \frac{1}{x}, g(x) = \sqrt{x}, x > 0; & d) f(x) = \operatorname{tg} x, g(x) = \operatorname{ctg} x, 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{array}$$

2. Dla jakich wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ , wykresy funkcji  $y = e^{ax}$ ,  $y = e^{-x}$  przetną się pod kątem prostym?

**Zadanie 5.** Tory kolejowe biegnące równolegle trzeba połączyć rozjazdem składającym się z dwóch jednakowych łuków parabol (rysunek). Odległość między osiami torów wynosi  $d = 8\text{m}$ , a rozjazd ma mieć długość  $l = 40\text{m}$ . Należy go zaprojektować w ten sposób, aby ruch pociągów przebiegał w sposób gładki, tzn. aby w punktach  $A, B, C$  istniały styczne do krzywych rozjazdu. Podać równania łuków parabol w układzie współrzędnych



**Zadanie 6.** Gumowy balon ma kształt kuli o objętości  $V_0 = 40 \text{ m}^3$ . Do balonu wciąga się powietrze z prędkością  $p = 1 \text{ m}^3/\text{s}$ . Obliczyć, z jaką prędkością powiększać się będzie średnica balonu po 24 s. Założyć, że ciśnienie powietrza w balonie jest stałe.

**Zadanie 7.** Badając pochodne jednostronne rozstrzygnąć, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{aligned} a) \quad w(x) &= |\operatorname{ctg}^3 x|, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}; & b) \quad z(x) &= \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{dla } -\frac{\pi}{2} < x \leq 0, \\ \sin x & \text{dla } 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \end{cases} \quad x_0 = 1; \\ c) \quad f(x) &= |x^5|, \quad x_0 = 0; & d) \quad g(x) &= \begin{cases} \frac{x(x-1)}{2} & \text{dla } x < 1, \\ \sqrt{x} - 1 & \text{dla } x \geq 1, \end{cases} \quad x_0 = 1; \end{aligned}$$

**Zadanie 8.** Znaleźć parametry  $a, b, c$ , dla których podane funkcje mają pochodne na  $\mathbb{R}$ :

$$\begin{aligned} a) \quad u(x) &= \begin{cases} x+1 & \text{dla } x \leq 0, \\ a \sin x + b \cos x & \text{dla } x > 0; \end{cases} & b) \quad v(x) &= \begin{cases} ae^x + e^{-x} & \text{dla } x < 0, \\ chx & \text{dla } x \geq 0; \end{cases} \\ c) \quad f(x) &= \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ a \sin x + b \cos x + c & \text{dla } 0 \leq x \leq \pi, \\ 1 & \text{dla } x > \pi; \end{cases} & d) \quad g(x) &= \begin{cases} ae^x + b & \text{dla } x \leq 0, \\ 2-x & \text{dla } x > 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Zadanie 9.** Zbadać, czy podane funkcje mają pochodne niewłaściwe w punkcie  $x_0 = 0$ :

$$\begin{aligned} a) \quad u(x) &= 3 - \sqrt[5]{x}; & b) \quad v(x) &= \operatorname{tg} \sqrt[3]{x}; \\ c) \quad w(x) &= \sqrt{|\sin x|}; & d) \quad f(x) &= \sqrt{|x| + \sqrt{|x|}}; \end{aligned}$$

**Zadanie 10.** Korzystając z reguł różniczkowania obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$\begin{aligned} a) \quad y &= \left(x^3 + \frac{1}{x^2}\right) e^x; & b) \quad y &= \frac{\sin x}{x^4 + 4}; \\ c) \quad y &= \sqrt[3]{\arcsin(x^3)}; & d) \quad y &= x^{\operatorname{tg} x}; \\ e) \quad y &= \frac{\arcsin x}{e^x}; & f) \quad y &= (1 + \sqrt[4]{x}) \operatorname{tg}(\sqrt{x}); \\ g) \quad y &= \sqrt[3]{x}; & h) \quad y &= \frac{2^{\sin^2 x}}{3^{\cos^2 x}}. \end{aligned}$$

**Zadanie 11.** Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć  $(f^{-1})'(y)$  dla:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= 3^{-x}, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}; & b) \quad f(x) &= \cos x, \text{ gdzie } 0 < x < \pi; \\ c) \quad f(x) &= \operatorname{tgh} x, \text{ gdzie } x \in \mathbb{R}; & d) \quad f(x) &= \ln x, \text{ gdzie } x > 0; \end{aligned}$$

**Zadanie 12.** Korzystając z twierdzenia o pochodnej funkcji odwrotnej obliczyć:

$$\begin{aligned} a) \quad (f^{-1})'(e+1), & \text{ gdzie } f(x) = x + \ln x; & b) \quad (g^{-1})'(1), & \text{ gdzie } g(x) = \cos x - 3x; \\ c) \quad (h^{-1})'(3), & \text{ gdzie } h(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}; & d) \quad (k^{-1})'(4), & \text{ gdzie } k(x) = x^3 + 3^x. \end{aligned}$$

**Zadanie 13.** Zakładając, że funkcje  $f$  i  $g$  mają pochodne właściwe na wspólnym przedziale, obliczyć pochodne podanych funkcji:

$$\begin{aligned} a) \quad y &= f(x) \cos g(x); & b) \quad y &= e^{\frac{f(x)}{g(x)}}; \\ c) \quad y &= \operatorname{arctg}[f(x)g(x)]; & d) \quad y &= \ln(f(x)^{g(x)} + 1); \\ e) \quad y &= \sin[f(x)g(x)]; & f) \quad y &= [f(x)]^{g(x)}; \\ g) \quad y &= \operatorname{tg} \frac{f(x)}{g(x)}; & h) \quad y &= f(x) \operatorname{arc} \operatorname{tg} g(x). \end{aligned}$$

**Zadanie 14.** Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

- a)  $\sqrt[3]{7.999}$ ;      b)  $e^{0.04}$ ;      c)  $\ln \frac{2001}{2000}$ ;  
d)  $\arcsin 0.51$ ;      e)  $e^{-0.07}$ ;      f)  $\ln 0.9993$ .

**Zadanie 15.** Fragment terenu ma kształt trójkąta równoramiennego o boku  $b = 200$  m. Kąt przy wierzchołku tego trójkąta, zmierzony z dokładnością 0.001 rad wynosi  $\frac{\pi}{3}$ . Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć pole tego terenu?

**Zadanie 16.** Obliczyć  $f'$ ,  $f''$ ,  $f'''$  podanych funkcji:

- a)  $f(x) = x^3 - \frac{2}{x}$ ;      b)  $f(x) = x \sin x$ ;  
c)  $f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x$ ;      d)  $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$ .

**Zadanie 17.** Z badać, czy istnieje  $f^{(n)}(x_0)$  dla podanych funkcji i punktów:

- a)  $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ x^3 & \text{dla } x \geq 0, \end{cases}$       b)  $f(x) = \begin{cases} x^4 \arctg \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$   
 $x_0 = 0, n = 2$ ;       $x_0 = 0, n = 3$ .

**Zadanie 18.** Punkt materialny porusza się po krzywej  $y = 2^x$  w ten sposób, że jego rzut na oś  $Ox$  ma stałą prędkość  $v_x = 3$ . Z jaką prędkością (w kierunku osi  $Oy$ ) porusza się ten punkt w chwili, gdy jest na wysokości 4?

**Zadanie 19.** Położenie cząstki w chwili  $t$  opisuje wektor wodzący  $\vec{r} = (e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ . Znaleźć przyspieszenie cząstki w chwili, gdy wektor prędkości miał długość  $\sqrt{3}$ .

**Zadanie 20.** Sprawdzić, czy podane funkcje spełniają założenia twierdzenia Rolle'a na przedziale  $[-1, 1]$ . Narysować wykresy tych funkcji.

- a)  $u(x) = \left| \sin \frac{\pi x}{2} \right|$       b)  $v(x) = 1 - |x|$ ;  
c)  $w(x) = \arcsin |x|$ ;      d)  $z(x) = \begin{cases} x^3 \sin \frac{\pi}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases}$

**Zadanie 21.** Zastosować twierdzenie Lagrange'a do podanych funkcji na wskazanych przedziałach. Wyznaczyć odpowiednie punkty:

- a)  $u(x) = e^x, [0, 2]$ ,      b)  $v(x) = x^3 + x, [-1, 1]$ ,  
c)  $w(x) = \arctg x, [-1, \sqrt{3}]$ ,      d)  $z(x) = \sqrt{3}x^3 + 3x, [0, 1]$

**Zadanie 22.** Korzystając z twierdzenia Lagrange'a uzasadnić podane nierówności:

- a)  $|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|$ , dla  $a, b \in \mathbb{R}$ ,      b)  $\ln \frac{b}{a} < b - a$  dla  $1 \leq a < b$ ,  
c)  $x \leq \arcsin x \leq \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$  dla  $0 \leq x < 1$ ,      d)  $e^x > ex$  dla  $x > 1$ ,

**Zadanie 23.** Znaleźć przedziały monotoniczności podanych funkcji:

- a)  $u(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - x^2$ ,      b)  $v(x) = e^x(x+1)$ ,  
c)  $w(x) = x - 3\sqrt[3]{x}$ ,      d)  $z(x) = x \ln^2 x$ ,  
e)  $q(x) = 4x + \frac{1}{x}$ ,      f)  $r(x) = \frac{1}{x \ln x}$ .

**Zadanie 24.** Narysować przykładowe wykresy funkcji  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , które spełniają wszystkie podane warunki:

- a)  $f'(x) > 0$  dla  $x \in (-\infty, 1) \cup (4, \infty)$ ,  $f'(x) \leq 0$  dla  $x \in (1, 4)$ , ale  $f'(1)$ ,  $f'(4)$  nie istnieją,  
 b)  $f'(x) > 0$  dla każdego  $x < 1$ ,  $f'(x) < 0$  dla każdego  $x > 1$ ,  $f'_-(1) = 1$ ,  $f'_+(1) = -\frac{1}{2}$ ,  $f(1) = 2$ ,  
 c)  $f'(x) > 0$  dla każdego  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = 0$ ,

Na rysunkach zaznaczyć fragmenty wykresów, które spełniają poszczególne warunki.

**Zadanie 25.** Uzasadnić podane tożsamości:

- a)  $\arccot x + \arctan x = \frac{\pi}{2}$  dla  $x \in \mathbb{R}$ ,  
 b)  $\arcsin \frac{2x}{1+x^2} = 2\arctan x$  dla  $x \in (-1, 1)$ ,

**Zadanie 26.** Korzystając z reguły de l'Hospitala obliczyć podane granice:

- a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x+1)}{x}$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln \sin \frac{\pi}{2}x}{\ln x}$ ,  
 c)  $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x}}$ ,      d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} x \arccot x$ ,  
 e)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x$ ,      f)  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right)$ ,  
 g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln \cos 3x}$ ,      h)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\pi} \arctan x\right)^x$   
 i)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (1+x)^{\ln x}$ ,      j)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right)^{\sin x}$ ,

**Zadanie 27.** Obliczyć podane granice. Czy można tu zastosować regułę de l'Hospitala?

- a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}$ ,      b)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \cos 3x}{x - \cos 2x}$ ,      c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^x - \sin x}{2^x + \cos x}$ .