

Analiza Matematyczna

Lista zadań 5, 2023/24z

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania, GiS 2008)

5 Zastosowania pochodnych

Zadanie 1. Napisać wzory Taylora z resztą Lagrange'a dla podanych funkcji f , punktów x_0 oraz n :

- a) $f(x) = x^3$, $x_0 = -1$, $n = 4$, b) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, $x_0 = 1$, $n = 2$,
c) $f(x) = \sin 2x$, $x_0 = \pi$, $n = 3$, d) $f(x) = e^{-x}$, $x_0 = 0$, $n = 5$,
e) $f(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$, f) $f(x) = \ln x$, $x_0 = e$, $n = 4$,

Zadanie 2. Napisać wzory Maclaurina dla podanych funkcji z n -tą resztą Lagrange'a:

- a) $f(x) = \sin \frac{x}{3}$, $\mathbb{R}_n$, b) $f(x) = \operatorname{ch} x$, $\mathbb{R}_n$,
c) $f(x) = \cos x$, $\mathbb{R}_n$, d) $f(x) = \frac{x}{e^x}$, $\mathbb{R}_n$.

Zadanie 3. Oszacować dokładności podanych wzorów przybliżonych na wskazanych przedziałach:

- a) $\cosh x \approx 1 + \frac{x^2}{2}$, $|x| \leq 0.1$, b) $\operatorname{tg} x \approx x$, $|x| \leq \frac{\pi}{12}$,
c) $\ln(1-x) \approx -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$, $|x| \leq 0.1$, d) $\frac{1}{\sqrt{4+x}} \approx \frac{1}{2} - \frac{x}{16}$, $0 < x < 0.1$,

Zadanie 4. Stosując wzór Maclaurina obliczyć:

- a) $\sin 0.1$ z dokładnością 10^{-5} , b) $\frac{1}{e}$ z dokładnością 10^{-4} ,
c) $\ln 1.1$ z dokładnością 10^{-4} , d) $\frac{1}{\sqrt[3]{e}}$ z dokładnością 10^{-3} .

Zadanie 5. Korzystając z definicji uzasadnić, że podane funkcje mają ekstrema lokalne we wskazanych punktach:

- a) $u(x) = \begin{cases} |x| & \text{dla } x \neq 0 \\ 1 & \text{dla } x = 0, \end{cases} x_0 = 1$, b) $v(x) = \cosh x$, $x_0 = 0$;
c) $w(x) = |x-1| + |x+1|$, $x_0 = 1$; d) $z(x) = |\sin x|$, $x_0 = \pi$,

Zadanie 6. Znaleźć wszystkie ekstrema lokalne podanych funkcji:

- a) $u(x) = \frac{2x^2-1}{x^4}$, b) $v(x) = x \ln x$,
c) $w(x) = x - \sqrt{x}$, d) $z(x) = |x^2 - 5x - 6|$,

Zadanie 7. Znaleźć wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

- a) $u(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x$, $[1, 5]$, b) $v(x) = \arctg \frac{1-x}{1+x}$, $[0, 1]$,
c) $w(x) = (x-3)^2 e^{|x|}$, $[-1, 4]$, d) $z(x) = 1 - |9 - x^2|$, $[-5, 1]$,

Zadanie 8. Określić przedziały wypukłości oraz punkty przegięcia podanych funkcji:

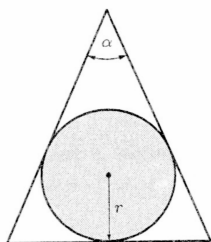
- a) $u(x) = xe^{-x}$, b) $v(x) = \ln(1 + x^2)$,
c) $w(x) = x - \frac{2}{3}x^3 - 4\ln|x|$, d) $z(x) = \sin x + \frac{1}{8}\sin 2x$,

Zadanie 9. Zbadać przebieg zmienności podanych funkcji i następnie sporządzić ich wykresy:

- a) $u(x) = x \ln x$, b) $v(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1}$,
c) $z(x) = e^{\frac{2-x^2}{x^2-1}}$, d) $w(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}$,
e) $r(x) = 3 - \frac{4}{x} - \frac{4}{x^2}$, f) $s(x) = x2^{\frac{1}{x}}$,

Zadanie 10. Kropla deszczu spada pod wpływem siły ciężkości (pomijamy opór powietrza). W czasie spadku kropla paruje w ten sposób, że jej masa zmniejsza się proporcjonalnie do upływu czasu. Wiadomo, że po 5 sekundach wyparowała połowa jej masy. Po ilu sekundach energia kinetyczna kropli będzie największa?

Zadanie 11. Jaka powinna być miara kąta α przy wierzchołku trójkąta równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?

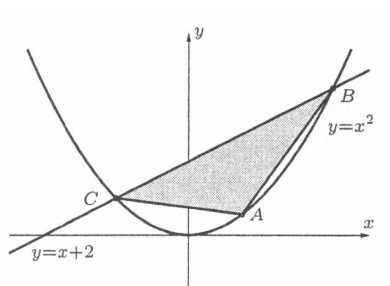
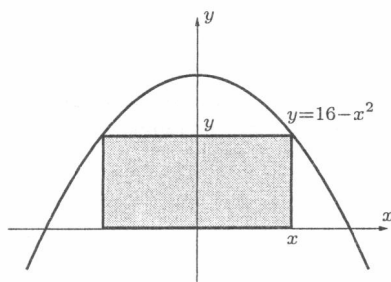


Zadanie 12. Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność 22.50 m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1 m^2 blachy potrzebnej do wykonania jego podłogi i pokrywy wynosi 20 zł, a ścian bocznych - 30 zł. Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?

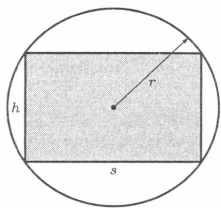
Zadanie 13. Odcinek o długości l podzielić na dwie części tak, aby suma pól kwadratów zbudowanych na tych częściach była najmniejsza.

Zadanie 14. a) W parabolę o równaniu $y = 16 - x^2$ wpisano prostokąt, w sposób przedstawiony na rysunku. Znaleźć wymiary prostokąta, który ma największe pole.

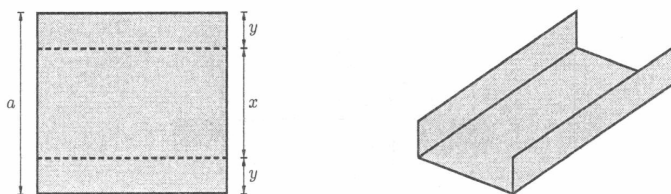
b) Na paraboli $y = x^2$ wyznaczyć punkt A tak, aby pole trójkąta, którego wierzchołkami są punkt A oraz punkty B, C przecięcia paraboli z prostą $y = x + 2$, było największe.



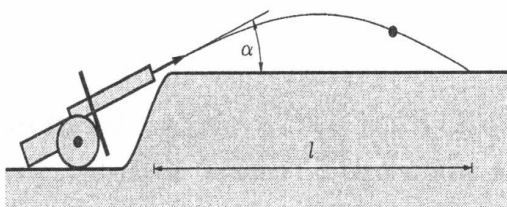
Zadanie 15. Wytrzymałość deski o ustalonej długości jest wprost proporcjonalna do jej szerokości s oraz do kwadratu grubości h . Jakie wymiary powinna mieć deska wycięta z okrągłego pniaka o promieniu $r = 9$ cm, aby jej wytrzymałość była największa?



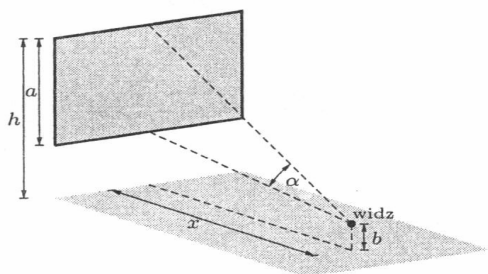
Zadanie 16. Z prostokątnego kawałka blachy o szerokości a należy wygiąć rynnę o przekroju prostokątnym w ten sposób, aby mogło nią spływać możliwie najwięcej wody. Znaleźć wymiary przekroju takiej rynny.



Zadanie 17. Pocisk wylatuje z działa z prędkością v_0 . Pod jakim kątem powinna być nachylona od lufy, aby zasięg pocisku był największy? Nie uwzględniać oporu powietrza.



Zadanie 18. Ekran w kinie ma szerokość $a = 8$ m i jest zawieszony na wysokości $h = 12$ m. W jakiej odległości od ekranu powinien siedzieć widz, aby oglądać film pod największym kątem? Założyć, że widz siedzi w środku rzędu, a jego oczy znajdują się na wysokości $b = 1.5$ m nad podłogą.



Zadanie 19. Współczynnik tarcia skrzyni o masie $m = 100$ kg o podłogę wynosi $\mu = 0.7$. Pod jakim kątem α należy ciągnąć skrzynię, aby siła $F = |\vec{F}|$ potrzebna do jej ruszenia była najmniejsza?

