

Analiza Matematyczna. Lista zadań 6

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania, GiS 2008)

6 Całka nieoznaczona

Zadania na ćwiczenia

Zadanie 1. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{ll} a) \int \left(3\sqrt[3]{x^2} + \frac{1}{x^3} - 2x\sqrt{x} \right) dx, & b) \int \frac{(1-x)dx}{1-\sqrt[3]{x}}; \\ c) \int \frac{x^4 dx}{x^2+1}; & d) \int \frac{\cos 2x dx}{\cos x - \sin x}, \end{array}$$

Zadanie 2. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{lll} a) \int \ln(x+1)dx, & b) \int \cos \ln x dx, & c) \int x^2 2^x dx, \\ d) \int \sqrt{x} \arctg \sqrt{x} dx, & e) \int x \cosh x dx, & f) \int \frac{\arccos x dx}{\sqrt{x+1}}, \end{array}$$

Zadanie 3. Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{\cos \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, & b) \int \frac{\sqrt{1+4x}}{x} dx, & c) \int (x+1) \sin(x^2+2x+2) dx, \\ d) \int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}}, & e) \int x^2 \sqrt[5]{5x^3+1} dx, & f) \int \frac{dx}{2+\sqrt{x}}, \end{array}$$

Zadanie 4. Obliczyć podane całki:

$$\begin{array}{ll} a) \int (|x|+1)dx, & b) \int f(x)dx, \text{ gdzie } f(x) = \begin{cases} x & \text{dla } x < 0 \\ \sin x & \text{dla } x \geq 0; \end{cases} \\ c) \int \min\{x, x^2\}dx, & d) \int \arctg |x| dx, \\ e) \int |1-x^2|dx, & f) \int e^{|x|} dx, \end{array}$$

Zadanie 5. Obliczyć podane całki z ułamków prostych pierwszego rodzaju:

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{dx}{(x-3)^7}, & b) \int \frac{dx}{x+5}, \\ c) \int \frac{5dx}{(2-7x)^3}, & d) \int \frac{8dx}{9x+20}. \end{array}$$

Zadanie 6. Obliczyć podane całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{dx}{x^2+4x+29}, & b) \int \frac{(6x+3)dx}{x^2+x+4}, \\ c) \int \frac{dx}{(x^2-4x+5)^2}, & d) \int \frac{5dx}{(x^2+2)^3}, \end{array}$$

Zadanie 7. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{(x+2)}{x(x-2)} dx, & b) \int \frac{x^2}{x+1} dx, & c) \int \frac{dx}{(x-1)x^2}, \\ d) \int \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}, & e) \int \frac{(4x+1)dx}{2x^2+x+1}, & f) \int \frac{(3x-1)dx}{x^2-x+1}, \\ g) \int \frac{dx}{x^2+2x+8}, & h) \int \frac{2dx}{x^2+6x+18}, & i) \int \frac{(5-4x)dx}{x^2-4x+20}, \end{array}$$

Zadanie 8. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{dx}{\sin x + \operatorname{tg} x}, & b) \int \frac{1 + \operatorname{tg} x}{\cos x} dx, & c) \int \frac{dx}{1 + 2 \cos^2 x}, \\ d) \int \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} dx, & e) \int \frac{dx}{1 - \operatorname{tg} x}, & f) \int \frac{\sin^5 x}{\cos^5 x} dx, \end{array}$$

Zadanie 9. Obliczyć podane całki z funkcji niewymiernych:

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}, & b) \int x^3 \sqrt{1+x^2} dx, \\ c) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2-1}}, & d) \int \frac{\sqrt{9-x^2} dx}{x}, \end{array}$$

Zadania do samodzielnego rozwiązania

6 Całka nieoznaczona

Zadanie 1. Obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{x^3 + \sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt{x}} dx; & b) \int \frac{2^x - 5^x}{10^x} dx; \\ c) \int \operatorname{tg}^2 x dx; & d) \int \frac{e^{-2x} - 4}{e^{-x} + 2} dx; \end{array}$$

Zadanie 2. Korzystając z twierdzenia o całkowaniu przez części obliczyć całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{lll} a) \int x^2 \sin x dx, & b) \int e^{2x} \sin x dx, & c) \int x \ln x dx, \\ d) \int \frac{x dx}{\cos^2 x}, & e) \int \arccos x dx, & f) \int x e^{-3x} dx, \\ g) \int \log_3 x dx, & h) \int \arccos^2 x dx, & i) \int x \sin^2 x dx, \end{array}$$

Zadanie 3. Stosując odpowiednie podstawienie obliczyć podane całki nieoznaczone:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{dx}{\cosh x}, & b) \int \frac{(3x+2)dx}{3x^2+4x+7}, & c) \int (5-3x)^{10} dx, \\ d) \int \frac{\ln x}{x} dx, & e) \int \frac{x^3 dx}{x+1}, & f) \int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx, \\ g) \int \frac{5 \sin x dx}{3-2 \cos x}, & h) \int \sin^3 x dx, & i) \int \frac{dx}{\sqrt{4x-x^2}}, \\ j) \int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx, & k) \int x^3 e^{x^2} dx. & l) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{1+\sin x}} \end{array}$$

Zadanie 4. Obliczyć podane całki:

$$a) \int |\cos x| dx, \quad x \in [0, \pi], \quad b) \int \sqrt{1-|x|} dx.$$

Zadanie 5. Obliczyć podane całki z ułamków prostych drugiego rodzaju:

$$a) \int \frac{(4x+2)dx}{x^2-10x+29}, \quad b) \int \frac{(x-1)dx}{9x^2+6x+2},$$

Zadanie 6. Obliczyć całki z funkcji wymiernych:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{x^2}{x^2+2x+5} dx, & b) \int \frac{x(x+2)dx}{x^2+2x+2}, & c) \int \frac{dx}{x(x^2+4)}, \\ d) \int \frac{xdx}{(x-1)(x+2)(x+3)}, & e) \int \frac{(2x^4+5x^2-2)dx}{2x^3-x-1}, & f) \int \frac{dx}{x^3-4x}, \\ g) \int \frac{xdx}{1-x^4}, & h) \int \frac{dx}{(x-2)^2(x+3)^3}, & i) \int \frac{dx}{x^8+x^6} \end{array}$$

Zadanie 7. Obliczyć całki z funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{array}{lll} a) \int \frac{dx}{\cos x}, & b) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}, & c) \int \frac{dx}{3 \sin x + 4 \cos x + 5}, \\ d) \int \frac{dx}{\sin x \cos^2 x}, & e) \int \operatorname{tg}^4 x \, dx, & f) \int \frac{(1 + \sin x) dx}{1 + \cos x}, \end{array}$$

Zadanie 8. Obliczyć podane całki z funkcji trygonometrycznych:

$$\begin{array}{ll} a) \int \sin x \sin 3x \, dx, & b) \int \sin 3x \cos x \, dx, \\ c) \int \cos x \cos 5x \, dx, & d) \int \cos x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \, dx. \end{array}$$

Zadanie 9. Obliczyć podane całki z funkcji niewymiernych:

$$\begin{array}{ll} a) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4-x^2}}, & b) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{25+x^2}}, \\ c) \int \sqrt{x^2-36} \, dx, & d) \int \sqrt{3+x^2} \, dx, \end{array}$$