

Analiza Matematyczna. Lista zadań 7

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 1. Przykłady i zadania, GiS 2008)

7 Całka oznaczona

Zadanie 1. Korzystając z definicji oraz z faktu, że funkcje ciągłe są całkowalne obliczyć podane całki oznaczone:

$$\begin{array}{lll} a) \int_{-2}^1 (2x-1)dx & b) \int_0^2 |x-1|dx & c) \int_2^3 x^2 dx \\ d) \int_{-1}^2 e^x dx & e) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx & f) \int_0^1 \frac{dx}{3^x} \end{array}$$

Zadanie 2. Korzystając z twierdzenia Newtona-Leibniza (twierdzenia podstawowego w rachunku całkowym) obliczyć podane całki:

$$\begin{array}{lll} a) \int_1^2 \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx & b) \int_0^1 \frac{x-1}{x+1} dx & c) \int_0^9 \frac{dx}{x^2+9} \\ d) \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x^2-1} & e) \int_{\frac{1}{e}}^e \ln x dx & f) \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos x dx \end{array}$$

Zadanie 3. Korzystając z definicji całki oznaczonej uzasadnić podane równości:

$$\begin{array}{l} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{n\sqrt{n}} (\sqrt{1+n} + \sqrt{2+n} + \dots + \sqrt{n+n}) \right] = \frac{2}{3}(2\sqrt{2}-1), \\ b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^2+2^3+\dots+n^3}{n^4} = \frac{1}{4}, \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3n+1} + \frac{1}{3n+2} + \dots + \frac{1}{3n+n} \right) = \ln \frac{4}{3}, \\ d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[n \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \dots + \frac{1}{(n+n)^2} \right) \right] = \frac{1}{2}. \end{array}$$

Zadanie 4. Obliczyć podane całki oznaczone dokonując wskazanych podstawień:

$$\begin{array}{ll} a) \int_1^6 \frac{dx}{1+\sqrt{3x-2}}, \quad 3x-2=t^2, & b) \int_1^3 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}, \quad 1+x=t, \\ c) \int_1^e \ln x dx, \quad \ln x=t, & d) \int_0^{\frac{1}{4}} \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}, \quad x=t^2, \\ e) \int_{\frac{1}{3}}^1 \frac{\sqrt[3]{x-x^3}}{x^4} dx, \quad x=\frac{1}{t}, & f) \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx, \quad x=\cos t, \\ g) \int_0^1 x\sqrt{1+xdx}, \quad \sqrt{1+x}=t, & h) \int_0^3 \sqrt{9-x^2} dx, \quad x=3\sin t, \\ i) \int_0^{\frac{1}{2}\ln 3} \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}, \quad u=e^x, & j) \int_0^{\pi} \sin x e^{\cos x} dx, \quad v=\cos x. \end{array}$$

Zadanie 5. Metodą całkowania przez części obliczyć podane całki oznaczone:

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^1 \arcsin x dx, & b) \int_{\sqrt{e}}^e \frac{\ln x}{x^2} dx, \\ c) \int_0^\pi x(1 + \cos x) dx, & d) \int_0^1 x^2 e^{2x} dx, \\ e) \int_1^2 \ln x dx, & f) \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin 2x dx, \\ g) \int_0^\pi e^x \cos^2 x dx, & h) \int_{-1}^1 x e^{2x} dx. \end{array}$$

Zadanie 6. Obliczyć podane całki oznaczone:

$$\begin{array}{ll} a) \int_{\frac{1}{2}}^1 |\ln x| dx, & b) \int_0^2 \sqrt{x^4 - 4x^2 + 4} dx, \\ c) \int_{-\pi}^\pi \left| \sin x + \frac{1}{2} \right| dx, & d) \int_2^\pi e^{\lfloor x \rfloor} dx. \end{array}$$

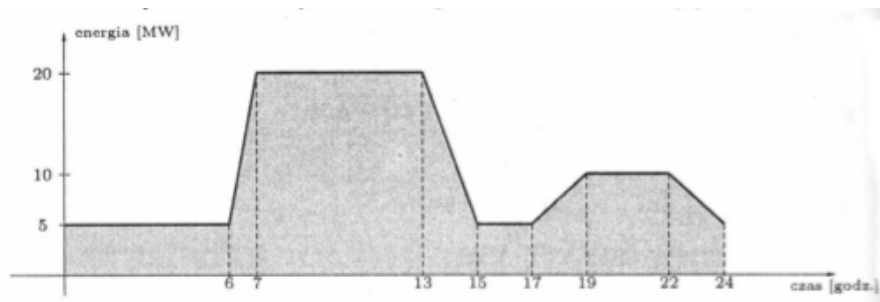
Zadanie 7. Oszacować całki:

$$\begin{array}{ll} a) \int_0^2 \frac{x^6 + 5}{x^6 + 2} dx, & b) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{2+x+x^2}}, \\ c) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x} dx, & d) \int_0^1 \ln(1+x^9) dx, \\ e) \int_0^1 e^x \sqrt[6]{1+x^3} dx, & f) \int_0^\pi \frac{dx}{100-2\sin^2 x}, \\ g) \int_{-1}^1 \frac{\cos x}{2+x^2} dx, & h) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}, \end{array}$$

Zadanie 8. Obliczyć całkowite wartości średnie podanych funkcji na wskazanych przedziałach:

$$\begin{array}{ll} a) u(x) = \frac{1}{x^2+4}, [0, 2], & b) v(x) = \sin^3 x, [0, \pi], \\ c) w(x) = |\ln x|, \left[\frac{1}{e}, e\right], & d) z(x) = \arctg x, [0, \sqrt{3}], \\ e) f(x) = \frac{x}{1+x^2}, [0, 2], & f) g(x) = \cos x, \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], \end{array}$$

Zadanie 9. Zapotrzebowanie na energię elektryczną w Polsce 13 kwietnia 2003 r. przedstawiono na wykresie. Obliczyć średnie zapotrzebowanie na energię w tym dniu.



Zadanie 10. Kamień Rzucono z wysokości $h = 2\text{m}$ pionowo do góry z prędkością początkową $v_0 = 5\text{m/s}$. Obliczyć średnią prędkość kamienia w czasie ruchu (od momentu upadku na ziemię). Nie uwzględniać oporu powietrza, przyjąć $g = 10\text{m/s}^2$.

Zadanie 11. W Nowy Rok średnia temperatura we Wrocławiu była równa 4°C . Przy czym od północy do godziny 6 rano temperatura była ujemna, a w godz. od 18 do 24 nie przekraczała 2°C . Uzasadnić, że w pewnej chwili temperatura była równa 7°C .

Zadanie 12. Wykorzystując własności całek z funkcji parzystych, nieparzystych lub okresowych uzasadnić podane równości:

$$a) \int_{-1}^1 \frac{x^5 - 3x^3 + x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx = 0,$$

$$b) \int_{-\pi}^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos x^2} dx = 2 \int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos x^2} dx,$$

$$c) \int_{-\pi}^{\pi} e^{x^2} \sin x dx = 0,$$

$$d) \int_{-1}^1 \frac{x^5 dx}{\sqrt{3-x^2}} = 0,$$

$$e) \int_{-4}^4 \sqrt{x^2 + 1} \cos x dx = 2 \int_0^4 \sqrt{x^2 + 1} \cos x dx,$$

$$f) \int_{-4}^4 \sqrt{x^2 + 1} \cos x dx = 2 \int_0^4 \sqrt{x^2 + 1} \cos x dx,$$

$$g) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2003} \sin^{2004} x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^{2004} \sin^{2003} x dx.$$

Zadanie 13. Dla podanych funkcji f całkownych na przedziale $[a, b]$, znaleźć funkcje górnej granicy całkowania

$$F(x) = \int_c^x f(t) dt, \text{ gdzie } c \in [a, b].$$

Naszkieować wykresy funkcji f i F , jeżeli:

$$a) f(x) = \operatorname{sgn}(x - x^2), \quad [a, b] = [-1, 2], \quad c = 0,$$

$$b) f(x) = \min\{1, x^2\}, \quad [a, b] = [-2, 3], \quad c = -2,$$

$$c) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } -1 \leq x \leq 0, \\ \frac{3x}{2} & \text{dla } 0 < x \leq 2, \end{cases} \quad [a, b] = [-1, 2], \quad c = -1,$$

$$d) f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{dla } 0 \leq x \leq 2, \\ 2x - 4 & \text{dla } 2 < x \leq 3, \end{cases} \quad [a, b] = [0, 3], \quad c = 1.$$