

Język matematyki, liczby rzeczywiste

I. Rachunek zdań. Pojęcie zdania, wartości logicznych i pojęcie tautologii.

Przykłady zdań:

- p = "suma kątów w trójkącie jest równa 180° "
- q = " $2 + 2 = 5$ "
- r = " $2 + 2 = 4$ "
- s = " $2 + 2 \neq 5$ "

Operacje na zdaniach

- $p \vee q$ (alternatywa)
- $p \wedge q$ (konjunkcja)
- $p \rightarrow q$ (implikacja)

Wartość logiczna zdania:

zdanie prawdziwe p - wartość logiczna 1,
zdanie fałszywe p - wartość logiczna 0.

Wyznaczanie wartości logicznej zdań złożonych. Przykład dla alternatywy, koniunkcji, implikacji oraz równoważności:

p	q	$p \vee q$	p	q	$p \wedge q$	p	q	$p \rightarrow q$	p	q	$p \leftrightarrow q$
0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0
1	0	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Def. Tautologia: zdanie złożone, którego wartość logiczna jest równa 1 bezwzględnie na to jakiej wartości logicznej są jego składniki, np:

- $\neg p \vee p$
- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$

1. Przegląd najważniejszych tautologii; między innymi

- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$ (prawo eliminacji implikacji)
- $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$ (prawo de Morgana)
- $\neg(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$ (prawo de Morgana)

2. Oznaczenie: $\varphi \equiv \psi$ oznacza $(\varphi \leftrightarrow \psi)$

3. Aksjomat ekstensjonalności: zbiory A , B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego x mamy

$$\bigwedge_x [(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$$

4. Def: $(x \in A \cup B) \leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$

5. Def: $(x \in A \cap B) \leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$

6. Def: $(x \in A \setminus B) \leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B))$

7. Zbiór pusty. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Wtedy zbiór $\emptyset = A \setminus A$ nazywamy zbiorem pustym. Inaczej

$$\bigwedge_x [(x \in \emptyset) \leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in A))]$$

Zauważamy, że zdanie po prawej stronie znaku $\leftrightarrow$ jest zawsze fałszywe. Dlatego zdanie $x \in \emptyset$ jest fałszywe dla każdego x .

8. Własności zbioru pustego

(1) $\emptyset \subset A$ dla każdego zbioru A , bo następująca implikacja

$$\bigwedge_x [(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)]$$

jest prawdziwa (tu poprzednik implikacji jest zawsze zdaniem fałszywym)

(2) $A \cup \emptyset = A$, dla każdego zbioru A , bo dla każdego x zachodzi:

$$x \in (A \cup \emptyset) \leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in \emptyset)] \leftrightarrow x \in A$$

9. Tw. Istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

Uzasadnienie: rozważmy dwa zbiory puste $\emptyset_1$ i $\emptyset_2$, przyjmując w równości (2) wyżej $A = \emptyset_1$, $\emptyset = \emptyset_2$ otrzymujemy $\emptyset_1 \cup \emptyset_2 = \emptyset_1$, podobnie $\emptyset_2 \cup \emptyset_1 = \emptyset_2$. Stąd $\emptyset_1 = \emptyset_2$

10. Def: Dla $A \subset \Omega$ określamy $A^c = \Omega \setminus A$ (uwaga: zawsze musimy wiedzieć do jakiego zbioru Ω dopełniamy)

11. Tw. (prawa de Morgana) Dla $A, B \subset \Omega$ mamy

$$(1) (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$(2) (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

12. Odpowiedniość między tautologiami a prawami rachunku zbiorów, przykłady:

- $(p \vee q \leftrightarrow q \vee p) : A \cup B = B \cup A$
- $(p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p) : A \cap B = B \cap A$
- $(p \wedge p \leftrightarrow p) : A \cap A = A$
- $((p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)) : (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
- $\models (\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)) : (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

13. Def. Funkcją (formą) zdaniową na zbiorze Ω nazywamy dowolne przyporządkowanie ψ elementom zbioru Ω zdań o wartościach logicznych ze zbioru $\{0, 1\}$, tzn. $\psi(x)$ staje się zdaniem logicznym $\bigwedge_{x \in \Omega}$.

14. Def. (operacja wyróżniania) Funkcje zdaniowe używamy do definiowania zbiorów. Niech φ będzie funkcją zdaniową na zbiorze Ω . Wtedy $A = \{x \in \Omega : \varphi(x)\}$ jeśli

$$x \in A \leftrightarrow x \in \Omega \wedge \varphi(x).$$

Przykład: $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \wedge x \leq 2\} = (0, 2]$.

15. Def: zdanie $(\forall x \in \Omega) \varphi(x)$ jest równoważne temu, że $\{x \in \Omega : \varphi(x)\} = \Omega$ ($\phi(x)$ jest zdaniem prawdziwym dla każdego x)

16. Def: zdanie $(\exists x \in \Omega) \varphi(x)$ jest równoważne temu, że $\{x \in \Omega : \varphi(x)\} \neq \emptyset$

17. Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:

- $\neg(\forall x \in \Omega) \varphi(x) \equiv (\exists x \in \Omega) (\neg\varphi(x))$
- $\neg(\exists x \in \Omega) \varphi(x) \equiv (\forall x \in \Omega) (\neg\varphi(x))$

II. Zbiory liczbowe. Liczby rzeczywiste

18. Oznaczenia:

- $\mathbb{R}$: zbiór liczb rzeczywistych,
- $\mathbb{Q}$: zbiór liczb wymiernych,
- $\mathbb{Z}$: zbiór liczb całkowitych,
- $\mathbb{N}$: zbiór liczb naturalnych $\{0, 1, 2, \dots\}$ (Uwaga: liczbę 0 zaliczamy do zbioru liczb naturalnych),

Zbiór liczb rzeczywistych

Działania arytmetyczne: $+$, $\cdot$, $(-)$, $:$, relacja porządku $<$:

Własności (aksjomaty) działań arytmetycznych i relacji porządku:

1. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x + y) + z = x + (y + z)$ (łączność dodawania)
2. $(\exists 0 \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) (x + 0 = x)$ (element neutralny dodawania (zero))
3. $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists -x \in \mathbb{R}) x + (-x) = 0$ (element przeciwny dodawania)
4. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x + y = y + x$ (przemienność dodawania)
5. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (łączność mnożenia)
6. $(\exists 1 \in \mathbb{R}) (\forall x \in \mathbb{R}) (x \cdot 1 = x)$ (element neutralny mnożenia (jedność))
7. $(\forall x \neq 0 \in \mathbb{R}) (\exists \frac{1}{x} \in \mathbb{R}) x \cdot \frac{1}{x} = 1$ (element odwrotny mnożenia)
8. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność mnożenia)
9. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R}) x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania)
10. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$)
11. $(\forall x, y \in \mathbb{R}) (x < y$ albo $x = y$ albo $y < x)$
12. $(\forall x, y, z \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$, to $x + z < y + z$)
13. $(\forall x, y \in \mathbb{R})(\forall z > 0 \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$, to $x \cdot z < y \cdot z$)
14. **Zasada Zupełności:** Każdy ograniczony, niepusty podzbiór $\mathbb{R}$ ma supremum(wyjaśnienie dalej).

Uzupełnienia

19. Zbiór liczb rzeczywistych rozszerzony: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Własności symboli $-\infty$ i ∞ .

- $(\forall x \in \mathbb{R}) -\infty < x < \infty$
- Działanie dodawania

+	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	nieokreślone
$y \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	∞
∞	nieokreślone	∞	∞

o Działanie mnożenia

$\cdot$	$-\infty$	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$	∞
$-\infty$	∞	∞	nieokreślone	$-\infty$	$-\infty$
$y < 0$	∞	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$-\infty$
$y = 0$	nieokreślone	0	0	0	nieokreślone
$y > 0$	$-\infty$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	nieokreślone	∞	∞

20. Podstawowe własności:

- o $(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$,
- o $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$,
- o $(x + y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$,

21. Wzór dwumianowy Newtona

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

22. Wniosek:

- o $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = (1 + 1)^n = 2^n$
- o $\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \dots + (-1)^n \binom{n}{n} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = (1 - 1)^n = 0$

23. Def. $0! = 1$, $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$

24. Tw. (Symbol dwumianowy Newtona) $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$

25. Funkcja kwadratowa:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

26. Nierówność Cauchy'ego (-Schwarza-Buniakowskiego): Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

Dowód: Rozważamy funkcję $f(x) = \sum_{k=1}^n (|a_k| - |b_k| \cdot x)^2$. Zauważamy, że jest to funkcja kwadratowa ze współczynnikami: $a = \sum_{k=1}^n b_k^2$, $b = -2 \sum_{k=1}^n |a_k b_k|$ i $c = \sum_{k=1}^n a_k^2$, która przyjmuje

tylko wartości nieujemne, $(\forall x)(f(x) \geq 0)$. Stąd wnioskujemy, że wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, wyliczamy Δ , upraszczamy i otrzymujemy żadaną nierówność.

Uwaga. Równość w powyższej nierówności ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $|a_i| = \lambda|b_i|$ dla $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Dla uzasadnienia zauważmy, że równość w nierówności Cauchy'ego oznacza, że $\Delta = 0$, czyli funkcja kwadratowa $f(x)$ ma miejsce zerowe λ , $f(\lambda) = 0$. To z kolei oznacza, że każdy składnik sumy $|a_i| - \lambda|b_i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, co należało udowodnić.

27. Def. Wartość bezwzględna

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

28. Tw: $\forall x, y \in \mathbb{R}$ jeśli $-|y| \leq x \leq |y|$, to $0 \leq |x| \leq |y|$

Dowód.

1. $-|y| \leq x \leq |y|$
2. $-|y| \leq x \leq |y| \quad / \cdot (-1), \quad -|y| \leq -x \leq |y|$

Z 1. i 2. wynika, że $-|y| \leq |x| \leq |y|$ i dalej $0 \leq |x| \leq |y|$, co należało uzasadnić.

29. Tw: $0 \leq |x + y| \leq |x| + |y|$

Dowód.

$$\begin{aligned} -|x| \leq x \leq |x| \text{ i } -|y| \leq y \leq |y| \\ -(|x| + |y|) \leq x + y \leq |x| + |y| \\ 0 \leq |x + y| \leq |x| + |y| \end{aligned}$$

30. Def. "odległości" liczb x, y : $d(x, y) = |x - y|$

31. Tw. (Nierówność trójkąta): $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

Dowód.

$$d(x, z) = |x - z| = |(x - y) + (y - z)| \leq |x - y| + |y - z| = d(x, y) + d(y, z)$$

32. Def. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Liczba g jest ograniczeniem górnym zbioru A , jeśli $(\forall x \in A)(x \leq g)$. Zbiór liczb g ograniczających zbiór A od góry oznaczamy jako $\hat{A}$

33. Def. Niech $A \subset \mathbb{R}$. Liczba g jest ograniczeniem dolnym zbioru A , jeśli $(\forall x \in A)(x \geq g)$. Zbiór liczb g ograniczających zbiór A od dołu oznaczamy jako $\check{A}$

34. Def. $g = \sup(A)$, jeśli g jest najmniejszą liczbą ograniczającą od góry zbiór A , $g = \min(\hat{A})$.

35. Def. $g = \inf(A)$, jeśli g jest największą liczbą ograniczającą od dołu zbiór A $g = \max(\check{A})$.

36. Zasada Zupełności: Każdy ograniczony od góry, niepusty podzbiór $\mathbb{R}$ ma supremum $\sup(A) \in \mathbb{R}$.

Podobnie: Każdy ograniczony od dołu, niepusty podzbiór $\mathbb{R}$ ma infimum.

37. Oznaczenie: $\sup(A) = \infty$, jeśli $A \neq \emptyset$ nie jest ograniczony od góry

38. Przykład: $\sup(\{x \in \mathbb{Q} : 0 \leq x \wedge x^2 \leq 2\}) = \sqrt{2}$

39. Tw. $\sup(\mathbb{N}) = \infty$

Dowód a. c.: Niech $\sup \mathbb{N} = M < \infty$. Wtedy liczba $M - 1$ nie jest liczbą ograniczającą zbiór $\mathbb{N}$ od góry, więc istnieje $n_0 \in \mathbb{N}$ takie, że $M - 1 < n_0$. Ponieważ wtedy $M < n_0 + 1$ i $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$, M nie jest liczbą ograniczającą zbiór $\mathbb{N}$ od góry. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

40. Wniosek: $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 0 \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(\frac{1}{n} < x))$.

41. Wniosek. Niech $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Wtedy $\check{A} = (-\infty, 0]$ i $\inf(A) = 0$.

42. Podobnie: $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 0 \rightarrow (\exists n \in \mathbb{N})(2^{-n} < x))$. Stąd $\inf(\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}) = 0$.

Indukcja matematyczna

43. Przykład. Udowodnić, że $6|n^3 - n$.

Dowód.

1. Udowodnimy, że teza $T(0)$ jest prawdziwa. Niech $s(n) = n^3 - n$. Dla $n = 0$, mamy $s(0) = 0$, czyli $6|s(0)$.

2. Udowodnimy, że prawdziwa jest implikacja $T(n) \rightarrow T(n+1)$ dla $n > 0$. Załóżmy, że $6|s(n)$ dla $n > 0$. Wtedy dla $n+1$ mamy

$$s(n+1) = (n+1)^3 - (n+1) = (n^3 - n) + 3n(n+1) = s(n) + 3n(n+1)$$

Pierwszy składnik $s(n)$ jest podzielny przez 6 na mocy założenia, drugi składnik $3n(n+1)$ jest podzielny również przez 6, bo wśród kolejnych liczb naturalnych n i $n+1$ jedna jest parzysta. Stąd $6|s(n+1)$, co należało pokazać.