

Nierówność Bernoulliego

$$\bigwedge_{x \geq -1} \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} (1+x)^n \geq 1+nx$$

Uzasadnienie

1. dla $n = 1$: $L = (1+x)^1 = 1+x$, $P = 1+x$, czyli $L = P$

2. zakładamy, że nierówność jest prawdziwa dla n ;

dla $n+1$: na początku zauważamy, że

$$L = (1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n$$

Ponieważ $1+x \geq 0$, z założenia indukcyjnego otrzymujemy

$$(1+x)(1+x)^n \geq (1+x)(1+nx) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x = P$$

W ten sposób $L \geq P$, więc na mocy zasady indukcji matematycznej nierówność jest prawdziwa dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Uzupełnienia

Dwumian Newtona

$$(x+y)^n = \binom{n}{0}x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \binom{n}{3}x^{n-3}y^3 + \cdots + \binom{n}{n}y^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}x^{n-k}y^k.$$

Symbole Newtona:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \text{ dla } n, k \in \mathbb{N}, n \geq k \geq 0$$

$$0! = 1, n! = 1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot n, \text{ dla } n \geq 1$$

1. Przykład:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} - \binom{n}{3} + \cdots + (-1)^n \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

Określenie potęgi a^x , gdzie $a > 1$ i $x \in \mathbb{R}$.

Def.

1. Dla $x = n \in \mathbb{N}$ określamy indukcyjnie: $a^0 = 1$, $a^{n+1} = a \cdot a^n$.

2. Dla $x = \frac{1}{n}$, gdzie $n \neq 0 \in \mathbb{N}$ określamy następująco: $a^{\frac{1}{n}} = \sup\{y > 0 : y^n \leq a\}$.

3. Niech $0 < x \in \mathbb{Q}$. Wtedy $x = \frac{m}{n}$ i $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m$.

4. Niech $0 < x \in \mathbb{R}$. Wtedy $a^x = \sup\{a^{\frac{m}{n}} : 0 < \frac{m}{n} < x\}$.

Uzupełnienie, dalej określamy:

1. $1^x = 1$ dla $x \geq 0$
2. $a^x = 1/(1/a)^x$ dla $0 < a < 1$ oraz $x > 0$
3. $a^x = 1/a^{-x}$ dla $a > 0$ oraz $x < 0$
4. $a^0 = 1$ dla $0 < a$
5. $a^{x+y} = a^x a^y$ dla $0 < a$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$
6. $(a^x)^y = a^{xy}$ dla $0 < a$ oraz $x, y \in \mathbb{R}$

Monotoniczność potęgi: Niech $a > 1$ i niech $0 < x_1 < x_2$. Wtedy $a^{x_1} < a^{x_2}$.

Ciągi i granice

2. Ciągiem nazywamy funkcję $a : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$; stosujemy oznaczenie $a_n = a(n)$.

3. Def: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, jeśli

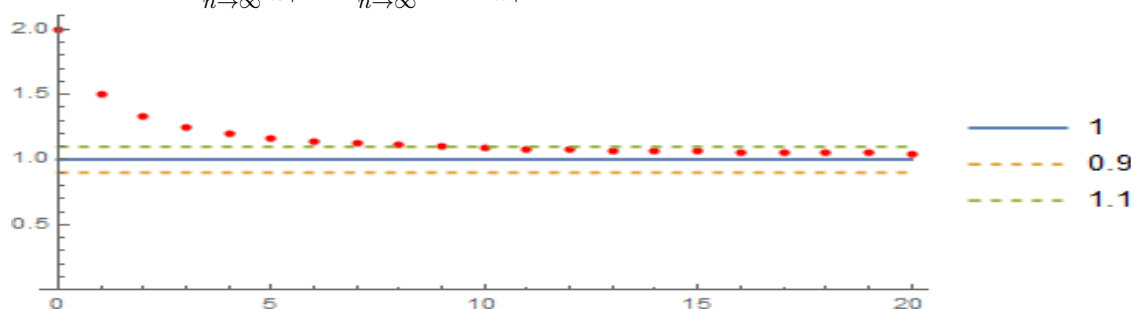
$$(L) \quad \left(\bigwedge \epsilon > 0 \right) \left(\bigvee N \in \mathbb{N} \right) \left(\bigwedge n > N \right) (|a_n - g| < \epsilon).$$

Mówimy, że ciąg jest zbieżny do g ; w skrócie piszemy $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g$

4. Przykład: Jeśli $(\bigwedge n \in \mathbb{N})(a_n = c)$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$.

5. Przykład: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

6. Przykład: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) = \dots = 1$.



7. Warunek Cauchy'ego. Mówimy, że ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, jeśli

$$(C) \quad \left(\bigwedge \epsilon > 0 \right) \left(\bigvee N \in \mathbb{N} \right) \left(\bigwedge n, m > N \right) (|a_n - a_m| < \epsilon).$$

8. Tw. Jeżeli ciąg liczb rzeczywistych (a_n) jest zbieżny, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$, to spełnia on warunek Cauchy'ego.

Uzasadnienie. Niech $\epsilon > 0$. Dla $\epsilon/2$ zgodnie z warunkiem (L) znajdujemy N takie, że $|a_n - g| < \epsilon/2$ dla $n > N$. Wtedy dla dowolnych $n, m > N$ mamy

$$|a_n - a_m| = |(a_n - g) + (g - a_m)| \leq |a_n - g| + |a_m - g| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon$$

W ten sposób dla dowolnie wybranego $\epsilon > 0$ znaleźliśmy N takie, że dla $n, m > N$ spełniona jest nierówność w warunku (C), to oznacza, że warunek Cauchy'ego jest spełniony.

Uwaga. Dla ciągów liczb rzeczywistych prawdziwe jest również twierdzenie odwrotne: jeżeli ciąg (a_n) spełnia warunek Cauchy'ego, to ciąg (a_n) jest zbieżny, tzn. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ dla pewnego $g \in \mathbb{R}$.

9. Przykład: Ciąg $a_n = (-1)^n$ nie ma granicy, mówimy, że jest rozbieżny:

Uzasadnienie. Nie wprost (a.c.), założmy, że ciąg ma granicę g . Wtedy np. dla $\epsilon = \frac{1}{2}$ istnieje takie N , że $a_n \in (g - \epsilon, g + \epsilon) = (g - \frac{1}{2}, g + \frac{1}{2})$ dla $n > N$. Wybierzmy $n_0 > N$. Wtedy $2n_0, 2n_0 + 1 > N$, więc

$$|a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| = |(a_{2n_0} - g) + (g - a_{2n_0+1})| \leq |(a_{2n_0} - g)| + |(a_{2n_0+1} - g)| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

Z drugiej strony

$$|a_{2n_0} - a_{2n_0+1}| = |1 - (-1)| = 2,$$

uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Własności granicy

10. Tw. (O jednoznaczności pojęcia granicy) Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_1$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g_2$, to $g_1 = g_2$.

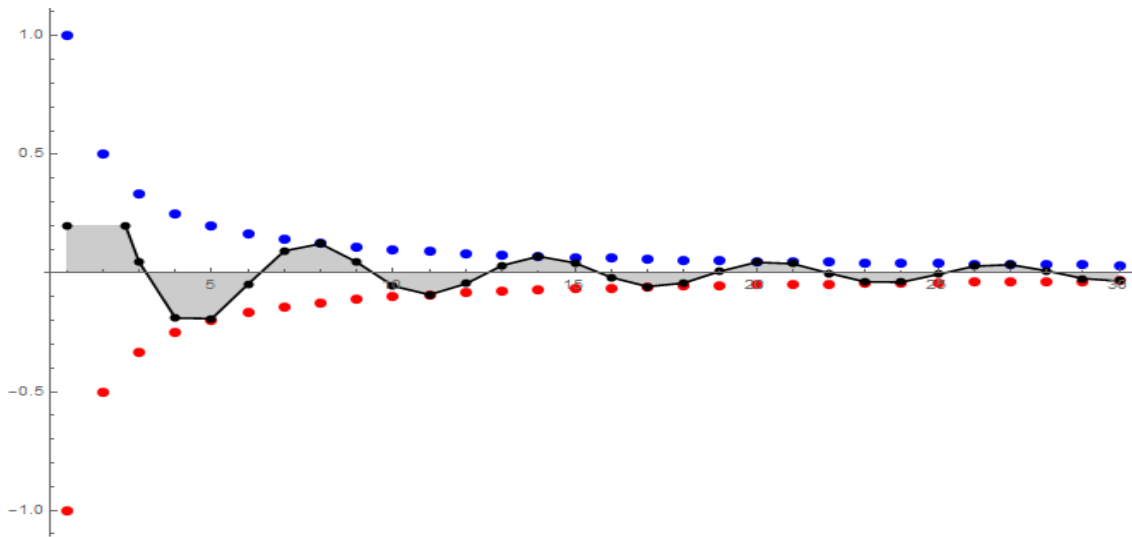
Uzasadnienie. Załóżmy nie wprost (a.c.), że $g_1 \neq g_2$. Wybierzmy $0 < \epsilon < \frac{1}{2}|g_1 - g_2|$. Wtedy odcinki $I_1 = (g_1 - \epsilon, g_1 + \epsilon)$ i $I_2 = (g_2 - \epsilon, g_2 + \epsilon)$ są rozłączne. Ponadto z określenia granicy wynika, że istnieją N_1 (w przypadku g_1) i N_2 (w przypadku g_2) takie, że $a_n \in I_1$ dla $n > N_1$ oraz $a_n \in I_2$ dla $n > N_2$. Stąd $a_n \in (I_1 \cap I_2)$ dla $n > N = \max(N_1, N_2)$, co jest niemożliwe, bo $I_1 \cap I_2 = \emptyset$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

11. Tw. (o operacjach arytmetycznych na ciągach zbieżnych). Niech ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ mają granicę właściwą, odpowiednio $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ i $b = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$. Wtedy

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$
3. jeżeli $b \neq 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$
4. $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n)^p = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^p$, gdzie $p \in \mathbb{Z}$
5. jeżeli $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n > 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[k]{a_n} = a^{\frac{1}{k}}$ dla dowolnego $k \in \mathbb{N}$

12. Tw. (o dwóch ciągach) Jeżeli $a_n \leq b_n$ dla $n > n_0$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, to $a \leq b$.

13. Tw. (O trzech ciągach). Załóżmy, że $(\wedge n) (a_n \leq b_n \leq c_n)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = g$. Wtedy $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = g$.



14. Tw. Jeżeli $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$.

Uzasadnienie. Z określenia granicy: dla każdego $\epsilon > 0$ istnieje N takie, że $|b_n - 0| < \epsilon$ dla $n > N$. Ponieważ $|b_n - 0| = |b_n| = ||b_n| - 0|$, wtedy również $||b_n| - 0| < \epsilon$ dla $n > N$, co oznacza, że $\lim_{n \rightarrow \infty} |b_n| = 0$.

15. Tw. Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony i ciąg $b_n \rightarrow 0$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = 0$.

Uzasadnienie. Ciąg (a_n) jest ograniczony, tzn. istnieje $M > 0$ takie, że $|a_n| \leq M$ dla $n \in \mathbb{N}$. Wtedy

$$\begin{aligned} |a_n b_n| &\leq M |b_n| \\ -M |b_n| &\leq a_n b_n \leq M |b_n| \\ \lim_{n \rightarrow \infty} M |b_n| &= M \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Stąd na mocy twierdzenia o trzech ciągach wynika żądana równość.

Ciągi monotoniczne

16. Def. Ciąg (a_n) jest niemalejący, jeśli $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$

17. Def. Ciąg (a_n) jest rosnący, jeśli $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$

18. Def. Ciąg (a_n) jest nierosnący, jeśli $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$

19. Def. Ciąg (a_n) jest malejący, jeśli $a_1 > a_2 > a_3 > \dots > a_n > \dots$

20. Tw. (o istnieniu granicy ciągu monotonicznego i ograniczonego) Jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący dla $n > n_0$ i ograniczony z góry, to ma granicę. Podobnie, jeżeli ciąg $\{a_n\}$ jest nierosnący dla $n > n_0$ i ograniczony z dołu, to ma granicę.

Ciągi rozbieżne do nieskończoności, granica niewłaściwa

21. Def. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, jeśli $(\bigwedge C \in \mathbb{R})(\bigvee N \in \mathbb{N})(\bigwedge n > N) (C < a_n)$

22. Def. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$, jeśli $(\bigwedge C \in \mathbb{R})(\bigvee N \in \mathbb{N})(\bigwedge n > N) (a_n < C)$

Podciągi

23. Def. Niech (a_n) będzie ciągiem liczb rzeczywistych i niech $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$ będzie ciągiem liczb naturalnych. Wtedy ciąg $(a_{n_k})_k$ jest podciągiem ciągu (a_n) .

24. (Granica podciągu) Tw. Jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ oraz $n_1 < n_2 < \dots$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n_k} = g$

25. Wniosek. Ciąg, z którego można wybrać dwa podciągi z różnymi granicami (właściwymi lub niewłaściwymi), nie ma granicy.

26. Przykład: a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (-1)^{n^2+2n}$ - nie istnieje, b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{n\pi}{3}$ - nie istnieje.

27. Tw. Jeśli $(\bigwedge n \in \mathbb{N})(a_n \leq b_n)$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$

28. Zasady postępowania z nieskończonościami:

1.	$a + \infty = \infty$ dla $-\infty < a \leq \infty$	2.	$a \cdot \infty = \infty$ dla $0 < a \leq \infty$
3.	$a - \infty = -\infty$ dla $-\infty < a \leq \infty$	4.	$a \cdot \infty = -\infty$ dla $-\infty \leq a < 0$
5.	$\frac{a}{\infty} = 0$ dla $-\infty < a < \infty$	6.	$\frac{a}{0+} = \infty$ dla $0 < a \leq \infty$
7.	$a^\infty = 0$ dla $0+ \leq a < 1$	8.	$a^\infty = \infty$ dla $1 < a \leq \infty$
9.	$\infty^b = 0$ dla $-\infty \leq b < 0$	10.	$\infty^b = \infty$ dla $0 < b \leq \infty$

Wyrażenia nieoznaczone

$\infty - \infty$	$0 \cdot \infty$	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	1^∞	∞^0	0^0
-------------------	------------------	---------------	-------------------------	------------	------------	-------

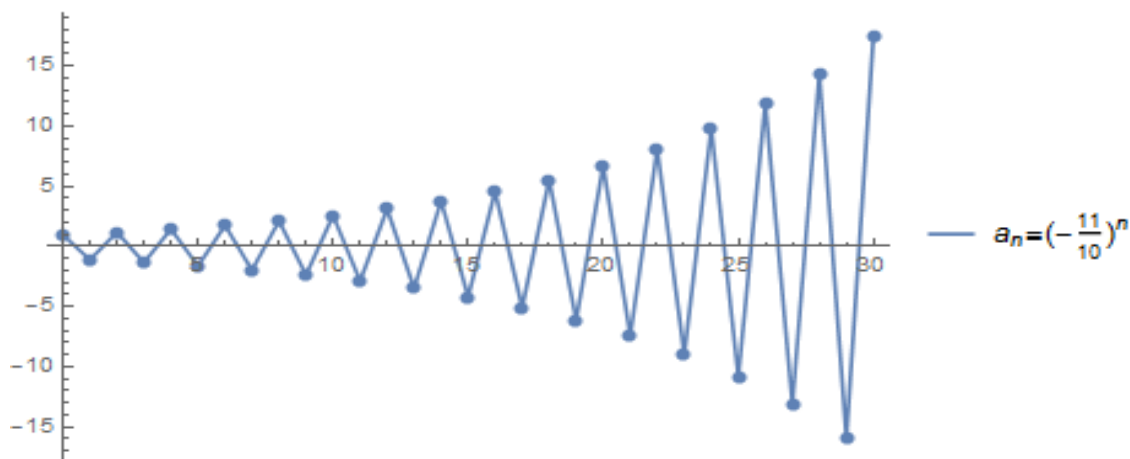
Uwaga. Wyrażenia w tabelkach są symbolicznym zapisem odpowiednich faktów, np.

1. $\frac{a}{0+} = \infty$ oznacza, że w przypadku, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $0 < a \leq \infty$ oraz $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, $b_n \geq 0$ dla $n > n_0$, zachodzi $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \infty$.

2. zapis $\infty - \infty$ oznacza, że w przypadku, gdy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$, to zbieżność ciągu $a_n - b_n$ musi być badana inaczej, niż za pomocą twierdzenia o granicy dwóch ciągów.

29. Przykład. Niech $a \in \mathbb{R}$ będzie ustaloną liczbą. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \begin{cases} \infty, & a > 1 \\ 1, & a = 1 \\ 0, & |a| < 1 \\ \text{nie istnieje,} & a \leq -1 \end{cases}$$



30. Tw. Jeśli $0 < a$, to $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

Uzasadnienie. Niech $a > 0$ i niech $\sqrt[n]{a} = 1 + x_n$. Wtedy $x_n \geq 0$ i $a = (1 + x_n)^n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \dots + \binom{n}{n}x_n^n \geq 1 + \binom{n}{1}x_n$. Stąd $0 \leq x_n \leq \frac{a-1}{n}$. Z ostatniej nierówności wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

31. Tw. $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Uzasadnienie. Niech $\sqrt[n]{n} = 1 + x_n$. Wtedy $x_n \geq 0$ i $n = (1 + x_n)^n = 1 + \binom{n}{1}x_n + \binom{n}{2}x_n^2 + \dots + \binom{n}{n}x_n^n \geq 1 + \binom{n}{2}x_n^2$. Stąd $x_n^2 \leq \frac{2}{n}$, co daje $0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n}}$. Z ostatniej nierówności wynika, że $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$.

32. Przykład: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{5^n \left(\left(\frac{3^n}{5^n} \right) + 1 \right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} 5 \sqrt[n]{\frac{3^n}{5^n} + 1} = 5$

33. Ważne granice ciągów

Liczba e: $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, $e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_n$

Uzasadnienie, że granica istnieje

- ciąg $\{e_n\}$ jest niemalejący, sprawdzenie

$$\begin{aligned} \frac{e_{n+1}}{e_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{(n+2)n}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(\frac{(n+1)^2 - 1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1} \geq \\ &= \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{n+1}{(n+1)^2}\right) = \left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 \end{aligned}$$

Uwaga: nierówność $\geq$ została otrzymana w wyniku zastosowania nier. Bernoulliego do wyrażenia $\left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n+1}$.

- ciąg $\{e_n\}$ jest ograniczony:

$$(1) \quad \binom{n}{k} \frac{1}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \frac{1}{n^k} = \frac{1}{k!} \frac{(n-k+1)(n-k+2)(n-k+3)\dots n}{n^k} =$$

$$\frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$(2) \quad e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} \frac{1}{n} + \binom{n}{2} \frac{1}{n^2} + \binom{n}{3} \frac{1}{n^3} + \dots + \binom{n}{n} \frac{1}{n^n} =$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{2}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot$$

$$\left(1 - \frac{k-2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots \leq$$

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{n!} \leq$$

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \leq 1 + 1 + 1 = 3$$

w przedostaniej nierówności skorzystaliśmy z nierówności $2^{n-1} \leq n!$, $\wedge n \geq 1$.

Inne (równoważne) określenie liczby e:

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$$

Uzasadnienie istnienia granicy powyższej granicy. Przyjmujemy

$$f_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!},$$

- ciąg $\{f_n\}$ jest niemalejący (oczywiste)
- ciąg $\{f_n\}$ jest ograniczony: dowód jak dla e_n (dwie ostatnie nierówności), $f_n \leq 1 + 1 + 1 = 3$
- zachodzi $e_n \leq f_n$, $\wedge_n$.

Wniosek: istnieje granica $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ i $e \leq f$

- dla podciągów $\{e_{n^3}\}$ i $\{f_{n+1}\}$ zachodzą nierówności

$$e_{n^3} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) + \dots + \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{n}{n^3}\right) \left(1 - \frac{n-1}{n^3}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^3}\right) + \dots \geq$$

$$\left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{k!} + \dots + \frac{1}{(n+1)!}\right) \left(1 - \frac{n}{n^3}\right)^n = \left(1 - \frac{n}{n^3}\right)^n f_{n+1} =$$

$$\left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} f_{n+1}$$

- przechodząc do granicy otrzymujemy $e = \lim_{n \rightarrow \infty} e_{n^3} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}} f_{n+1} = f$

Wniosek: $e \leq f$ i $e \geq f$, stąd $e = f$, co należało udowodnić.

34. Przykłady:

a)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n^k} = \infty$, gdzie $a > 1, k \in \mathbb{N}$
b)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$, gdzie $a > 0$
c)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin \frac{1}{n} = 0$
d)	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{1}{n} = 1$
e)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$, $e = 2.731 \dots$ - stała matematyczna
f)	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$, gdzie $\ln(\cdot) = \log_e(\cdot)$
g)	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \log_a \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \log_a e$, gdzie $a > 0, a \neq 1$

Uzasadnienie

a) Niech $a = 1 + y$, $y > 0$. Wtedy ze wzoru Newtona dla $n > k$ otrzymujemy

$$a^n = (1 + y)^n = 1 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \dots + \binom{n}{k+1}y^{k+1} + \dots + \binom{n}{n}y^n >$$

$$\binom{n}{k+1}y^{k+1} = \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot n(n-1)(n-2)\dots(n-k)$$

Stąd

$$\frac{a^n}{n^k} > \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k}$$

Zauważamy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k)}{n^k} =$$

$$\underbrace{\frac{1}{(k+1)!} \cdot y^{k+1}}_{=c} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{k}{n}\right) n = \infty,$$

stąd wynika żądana granica.

b) Wybieramy n_0 takie, że $a^2 < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ dla $n > n_0$ ($\lfloor \cdot \rfloor$ - część całkowita liczby). Wtedy zachodzi

$$a^2 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, a^2 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2, a^2 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3, \dots, a^2 < \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Zauważamy, że

$$(1) \quad a^n \leq a \cdot (a^2)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} < a \cdot \underbrace{\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3\right) \cdot \dots \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right)}_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \text{ czynników}}.$$

Dla wyrażenia po prawej stronie zachodzi nierówność

$$(2) \quad \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3\right) \cdot \dots \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \leq \\ \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3\right) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n;$$

(równość, gdy n jest parzyste i nierówność, gdy n jest nieparzyste)

Stąd

$$a^n \leq a \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3\right) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n$$

Ostatecznie

$$\frac{n!}{a^n} = \left(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor - 1\right) \cdot \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) \cdot \\ \left(\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 2\right) \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 3\right) \cdot \dots \cdot (n-1) \cdot n\right) \cdot \frac{1}{a^n} \geq \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! \cdot \frac{1}{a}$$

Ponieważ

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor! \cdot \frac{1}{a} = \infty,$$

wnioskujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{a^n} = \infty$$

c) prawdziwa jest nierówność

$$(*) \quad \cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$$

dla $0 < x \leq \frac{\pi}{2}$. Uzasadnienie:

$$\text{pole } \triangle OAB = \frac{1}{2}OA \cdot BD = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \sin x = \frac{\sin x}{2}$$

$$\text{pole wycinka koła } OAB = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot x = \frac{x}{2}$$

$$\text{pole } \triangle OAC = \frac{1}{2}OA \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

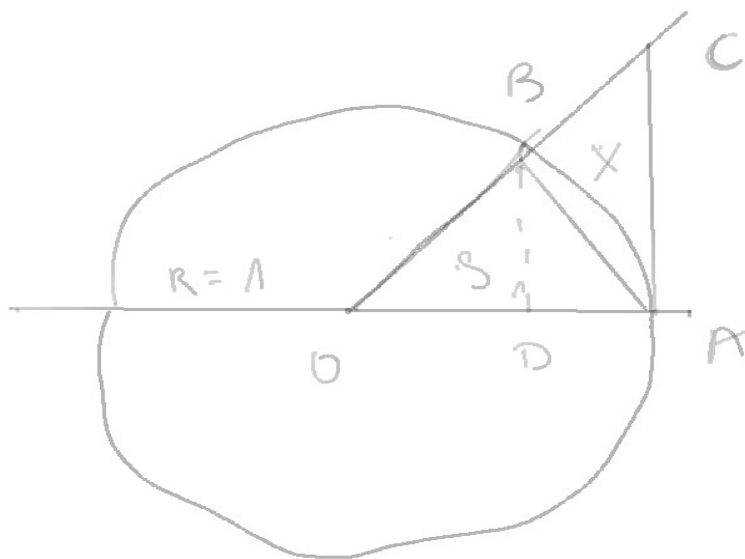
Ponieważ

$$\text{pole } \triangle OAB \leq \text{pole wycinka koła } OAB \leq \text{pole } \triangle OAC,$$

zachodzą nierówności

$$\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

Z tej nierówności po prostych przekształceniach otrzymujemy (*).



Z nierówności (*) wynika, że

$$0 \leq \sin \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n}$$

dla $n \in \mathbb{N}$. Istnienie i wartość granicy wynikają teraz z twierdzenia o trzech ciągach.

d) z nierówności (*) mamy

$$\cos \frac{1}{n} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{1}{n}} \leq n \sin \frac{1}{n} \leq 1.$$

Istnienie i wartość granicy wynikają teraz z twierdzenia o trzech ciągach.

f) Pamiętamy, że ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ma następujące własności

1. e_n jest niemalejący
2. $1 < e_n < e$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$

Zastosujemy metodę nie wprost (a contrario). Zakładamy, że istnieje $\epsilon > 0$ takie, że dla nieskończenie wielu n , wyrazy $n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \ln e_n$ leży poza przedziałem $(1 - \epsilon, 1)$, tzn.

$$n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1 - \epsilon, \text{ dla nieskończenie wielu } n \in \mathbb{N}$$

Stąd

$$e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e^{1-\epsilon}, \text{ dla nieskończenie wielu } n \in \mathbb{N}$$

Ostatnie stwierdzenie nie może być prawdziwe, bo ciąg $e_n \rightarrow e = e^1$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

g) Wystarczy zauważyć, że

$$\log_a z = \frac{\ln z}{\ln a} = (\ln z) \cdot (\log_a e)$$

dla $z > 0$.

35. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n} = 3$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(3) \quad \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} \left| \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n} - 3 \right| < \epsilon$$

Zaczynamy od analizy wyrażenia w (3), tu celem jest znalezienie prostszego wyrażenia szacującego je od góry

$$\begin{aligned} \left| \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n} - 3 \right| &= \left| \frac{\sqrt{9n^2 + 1} - 3n}{n} \right| = \left| \frac{1}{n(\sqrt{9n^2 + 1} + 3n)} \right| = \\ &= \frac{1}{n(\sqrt{9n^2 + 1} + 3n)} \leq \frac{1}{n(3n + 3n)} \leq \frac{1}{6n^2} \end{aligned}$$

Niech teraz $\epsilon > 0$. Dobieramy liczbę n_0 taką, że

$$\frac{1}{6n_0^2} < \epsilon,$$

np. można wziąć $n_0 = \frac{1}{\sqrt{6\epsilon}} + 1$. Teraz zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzą nierówności

$$\epsilon > \frac{1}{6n_0^2} > \frac{1}{6n^2} > \left| \frac{\sqrt{9n^2 + 1}}{n} - 3 \right|,$$

co dowodzi prawdziwości zdania (3).

36. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \log_{n+1} 5 = 0$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(4) \quad \bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} |\log_{n+1} 5 - 0| < \epsilon$$

Niech teraz $\epsilon > 0$. Przechodzimy do wskazania liczby n_0 . Na wstępie zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzi nierówność

$$\log_{n_0+1} 5 > \log_{n+1} 5$$

Stąd przyjmując n_0 takie, że

$$\log_{n_0+1} 5 = \epsilon, \quad \text{czyli } n_0 = 5^{\frac{1}{\epsilon}} - 1$$

otrzymujemy

$$\epsilon = \log_{n_0+1} 5 > |\log_{n+1} 5 - 0|.$$

co dowodzi prawdziwości zdania (4).

37. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej ciągu uzasadnić, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 - \sqrt[n]{3}} = -\infty.$$

d-d. Naszym zadaniem jest uzasadnienie, że prawdziwe jest zdanie

$$(5) \quad \bigwedge_M \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} M \geq \frac{1}{1 - \sqrt[n]{3}}.$$

Wystarczy rozpatrywać $M < 0$ (dlaczego?). Przechodzimy do wskazania liczby n_0 . Na wstępie zauważamy, że dla $n > n_0$ zachodzą nierówności

$$\sqrt[n_0]{3} > \sqrt[n]{3} > 1,$$

skąd

$$\frac{1}{1 - \sqrt[n]{3}} < \frac{1}{1 - \sqrt[n_0]{3}}$$

Dalej przyjmując n_0 takie, że

$$\frac{1}{1 - \sqrt[n_0]{3}} < M,$$

czyli

$$\sqrt[n_0]{3} < 1 - \frac{1}{M} = \frac{M-1}{M},$$

$$n_0 > \frac{1}{\log_3 \frac{M-1}{M}}$$

otrzymujemy

$$M > \frac{1}{1 - \sqrt[n_0]{3}} > \frac{1}{1 - \sqrt[n]{3}}.$$

dla $n > n_0$, co dowodzi prawdziwości zdania (5).

38. Niech $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+1}} + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[3]{n^3+n}}$. Udowodnić, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

d-d. Określamy pomocnicze ciągi

$$\alpha_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}}, \quad \beta_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Zauważamy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{1+\frac{1}{n^2}}} = 1,$$

$$\text{podobnie } \lim_{n \rightarrow \infty} \beta_n = 1$$

$$\alpha_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+n}} \leq a_n \leq \beta_n = \frac{n}{\sqrt[3]{n^3+1}}$$

Teraz wystarczy zastosować twierdzenie o trzech ciągach, skąd otrzymujemy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$.

39. Niech $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$. Udowodnić, że $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 3$.

d-d. Spostrzeżenie

- ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący.

Uzasadnienie: $2 = a_1 \leq \sqrt{6 + 2} = a_2$. Zakładamy, że $a_n \leq a_{n+1}$. Wtedy dla $n + 1$ mamy:

$$\begin{aligned} a_{n+2} - a_{n+1} &= \sqrt{6 + a_{n+1}} - \sqrt{6 + a_n} = \\ &= \frac{(\sqrt{6 + a_{n+1}} - \sqrt{6 + a_n})(\sqrt{6 + a_{n+1}} + \sqrt{6 + a_n})}{\sqrt{6 + a_{n+1}} + \sqrt{6 + a_n}} = \\ &= \frac{a_{n+1} - a_n}{\sqrt{6 + a_{n+1}} + \sqrt{6 + a_n}} \geq 0 \end{aligned}$$

Ostatnia nierówność zachodzi na podstawie założenia indukcyjnego. Teraz z zasady indukcji wynika teza naszego zadania.

- ciąg $\{a_n\}$ jest ograniczony, $2 \leq a_n \leq 3$ dla wszystkich $n \in \mathbb{N}$.

Uzasadnienie:

1. $2 = a_1 \leq a_n \wedge n$, bo $\{a_n\}$ jest niemalejący

2. zakładamy, że $a_n \leq 3$, wtedy dla $n + 1$ zachodzi $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n} \leq \sqrt{6 + 3} = 3$. Na mocy zasady indukcji $a_n \leq 3 \wedge n \in \mathbb{N}$

- ponieważ ciąg $\{a_n\}$ jest niemalejący i ograniczony, posiada granicę g
- wyznaczenie g :

$$\begin{aligned} g &= \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{6 + a_n} = \sqrt{6 + g} \\ g^2 &= 6 + g, \quad g_1 = -2, \quad g_2 = 3 \end{aligned}$$

rozwiązanie ujemne odrzucamy, więc $g = 3$

40. Tw. (o dwóch ciągach) Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają warunki

- $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$,

to $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \infty$.

41. Tw. Jeżeli ciągi $\{a_n\}$ i $\{b_n\}$ spełniają warunki

- $a_n \leq b_n$ dla każdego $n \geq n_0$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$,

to $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$.