

## Wykład: badanie funkcji

### Definicja. (ekstrema lokalne funkcji)

1. Funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0 \in \mathbb{R}$  minimum lokalne, jeżeli

$$\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} f(x) \geq f(x_0)$$

2. Podobnie, funkcja  $f$  ma w punkcie  $x_0 \in \mathbb{R}$  maksimum lokalne, jeżeli

$$\bigvee_{\delta > 0} \bigwedge_{x \in S(x_0, \delta)} f(x) \leq f(x_0)$$

**Uwaga.** Maksima, minima lokalne nazywamy ekstremami lokalnymi.

**Twierdzenie. (Fermata, warunek konieczny istnienia ekstremum)** Jeżeli funkcja  $f$  ma

1. ekstremum lokalne w punkcie  $x_0$ ,
2. pochodną  $f'(x_0)$ ,

to  $f'(x_0) = 0$ .

**Definicja. (punkty krytyczne funkcji)** Punkt  $x_0$  nazywamy punktem krytycznym funkcji  $f$ , jeżeli  $f'(x_0) = 0$  albo  $f'(x_0)$  nie istnieje.

**Uwaga.** Każdy punkt nieciągłości funkcji jest jej punktem krytycznym.

**Fakt. (o lokalizacji ekstremum funkcji)** Funkcja może mieć ekstrema lokalne tylko w punktach krytycznych.

**Twierdzenie. (warunek wystarczający istnienia ekstremum)** Jeżeli funkcja  $f$  spełnia warunki

1.  $f$  jest ciągła w  $x_0$ ,
2.  $f$  jest rosnąca w  $S(x_0^-, \delta)$  oraz  $f$  jest malejąca w  $S(x_0^+, \delta)$ ,

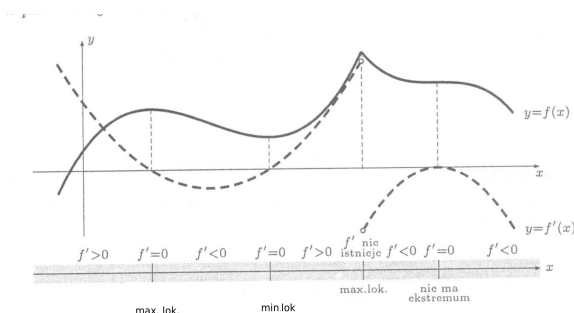
to w punkcie  $x_0$  funkcja  $f$  ma maksimum lokalne.

**Twierdzenie. (I warunek wystarczający istnienia ekstremum)** Jeżeli funkcja  $f$  spełnia warunki

1.  $f'(x_0) = 0$ ,
- 2.

$$\bigvee_{\delta > 0} \begin{cases} f'(x) \geq 0 & \text{dla każdego } x \in S(x_0^-, \delta), \\ f'(x) \leq 0 & \text{dla każdego } x \in S(x_0^+, \delta), \end{cases}$$

to w punkcie  $x_0$  ma maksimum lokalne.



rys. Ekstrema lokalne funkcji jako konsekwencja zmiany znaku jej pochodnej

**Twierdzenie. (II warunek wystarczający istnienia ekstremum)** Jeżeli funkcja  $f$  spełnia warunki:

1.  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ .
2.  $f^{(n)}(x_0) < 0$ ,

3.  $n$  jest liczbą parzystą, gdzie  $n \geq 2$ ,

to w punkcie  $x_0$  maksimum lokalne.

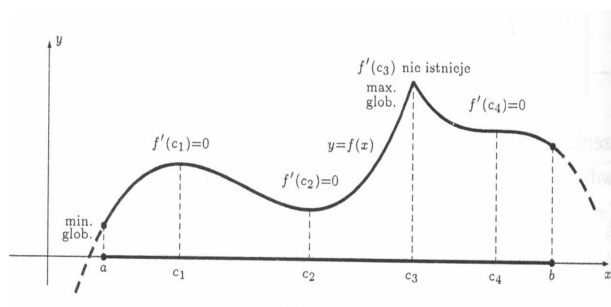
**Uwaga.** Jeżeli założenie 2. twierdzenia ma postać  $f^{(n)}(x_0) > 0$ , to funkcja ma w punkcie  $x_0$  minimum lokalne. Natomiast, jeżeli założenie 3. ma postać " $n$  jest liczbą nieparzystą", a założenie 2. postać  $f^{(n)}(x_0) \neq 0$ , to funkcja w punkcie  $x_0$  nie ma ekstremum lokalnego.

**Definicja. (ekstrema globalne)** Funkcja  $f$  ma ekstremum globalne (minimum lub maksimum) w  $x_0 \in [a, b]$ , jeżeli  $\bigwedge_{x \in [a, b]} f(x) \leq f(x_0)$  w przypadku maksimum lub  $\bigwedge_{x \in [a, b]} f(x) \geq f(x_0)$  w przypadku minimum.

### Algorytm szukania ekstremów globalnych funkcji na przedziale domkniętym

Niech funkcja  $f$  będzie ciągła na przedziale  $[a, b]$  i niech ma pochodną właściwą lub niewłaściwą poza skończoną liczbą punktów tego przedziału. Ponadto niech funkcja  $f$  ma skończoną liczbę punktów krytycznych. Ekstrema globalnych tej funkcji na tym przedziale szukamy postępując według algorytmu:

- znajdujemy punkty krytyczne  $c_1, c_2, c_3, \dots, c_n$  funkcji  $f$  na przedziale  $(a, b)$ ,
- obliczamy wartości funkcji  $f$  na końcach przedziału  $[a, b]$  oraz w punktach krytycznych,
- spośród liczb  $f(c_1), f(c_2), f(c_3), \dots, f(c_n)$  wybieramy najmniejszą i największą. Będą to odpowiednio minimum i maksimum globalne funkcji  $f$  na przedziale  $[a, b]$ .



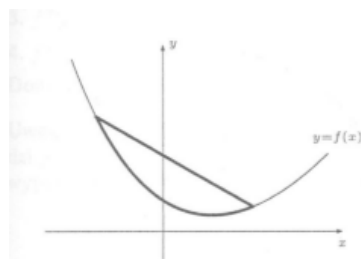
rys. Ekstrema globalne funkcji na przedziale

### Funkcje wypukłe

- Funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w dół na przedziale  $I$ , jeżeli

$$\bigwedge_{[x_1, x_2] \subset I} \bigwedge_{0 < \lambda < 1} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Geometrycznie funkcja jest ściśle wypukła w dół, gdy każdy odcinek siecznej leży wyżej niż część wykresu łącząca punkty, przez które przechodzi sieczna.

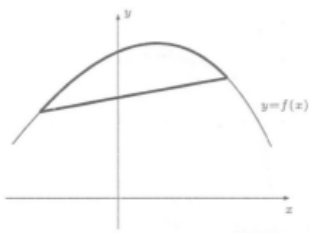


Rys. 6.2.1. Funkcja ściśle wypukła w dół.

- Funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w górę na przedziale  $I$ , jeżeli

$$\bigwedge_{[x_1, x_2] \subset I} \bigwedge_{0 < \lambda < 1} f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) > \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_2).$$

Geometrycznie funkcja jest ściśle wypukła w górę, gdy każdy odcinek siecznej leży niżej niż część wykresu łącząca punkty, przez które przechodzi sieczna.



Rys. 6.2.2. Funkcja ściśle wypukła w górę.

**Uwaga** Jeżeli w powyższych definicjach zamienimy nierówność ostrą na nierówność słabą, to będziemy mówić po prostu funkcja wypukła w dół lub w górę.

**Twierdzenie. (warunek wystarczający wypukłości)** Niech  $I$  będzie dowolnym przedziałem. Jeżeli dla każdego  $x \in I$  funkcja  $f$  spełnia nierówność:

1.  $f''(x) > 0$ , to jest ściśle wypukła w dół na  $I$ ,
2.  $f''(x) \geq 0$ , to jest wypukła w dół na  $I$ ,
3.  $f''(x) < 0$ , to jest ściśle wypukła w górę na  $I$ ,
4.  $f''(x) \leq 0$ , to jest wypukła w górę na  $I$ ,

**Uwaga.** Jeżeli  $f''(x) \geq 0$  dla każdego  $x \in I$ , przy czym równość  $f''(x) = 0$  zachodzi jedynie dla skończonej liczby punktów z przedziału  $I$ , to funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w dół. Podobnie jest dla funkcji ściśle wypukłej w górę.

**Punkty przegięcia** Punkt  $(x_0, f(x_0))$  nazywamy punktem przegięcia wykresu funkcji  $f$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje liczba  $\delta > 0$  taka, że funkcja  $f$  jest ściśle wypukła w dół dla  $x \in (x_0 - \delta, x_0)$  i wypukła w górę dla  $x \in (x_0, x_0 + \delta)$  albo jest odwrotnie.

### Pochodne a wykres funkcji

| $f'$          | $f''$          | $f'''$             | Własności funkcji         | Wykres |
|---------------|----------------|--------------------|---------------------------|--------|
| $f'(x) > 0$   | $f''(x) > 0$   |                    | rosnąca i wypukła w dół   |        |
| $f'(x) > 0$   | $f''(x) < 0$   |                    | rosnąca i wypukła w górę  |        |
| $f'(x) < 0$   | $f''(x) > 0$   |                    | malejąca i wypukła w dół  |        |
| $f'(x) < 0$   | $f''(x) < 0$   |                    | malejąca i wypukła w górę |        |
| $f'(x_0) = 0$ | $f''(x_0) > 0$ |                    | minimum lokalne właściwe  |        |
| $f'(x_0) = 0$ | $f''(x_0) < 0$ |                    | maksimum lokalne właściwe |        |
|               | $f''(x_0) = 0$ | $f'''(x_0) \neq 0$ | punkt przegięcia          |        |

**Badanie funkcji** - podstawowe czynności:

1. Ustalenie dziedziny funkcji.
2. Wskazanie podstawowych własności funkcji:
  - \*a. parzystość lub nieparzystość,
  - \*b. okresowość,
  - \*c. miejsca zerowe,

d. ciągłość.

3. Obliczenie granic lub wartości funkcji na "krańcach" dziedziny.

\*4. Znalazienie asymptot pionowych i ukośnych.

5. Zbadanie pierwszej pochodnej funkcji:

- wyznaczenie dziedziny pochodnej i jej obliczenie,
- wyznaczenie punktów, w których funkcja może mieć ekstrema,
- ustalenie przedziałów monotoniczności funkcji,
- ustalenie ekstremów funkcji,
- obliczenie granic lub wartości pochodnej na "krańcach" jej dziedziny.

6. Zbadanie drugiej pochodnej funkcji:

- wyznaczenie dziedziny drugiej pochodnej i jej obliczenie,
- wyznaczenie miejsc, w których funkcja może mieć punkty przegięcia,
- ustalenie przedziałów wypukłości,
- wyznaczenie punktów przegięcia wykresu funkcji,
- obliczenie pierwszej pochodnej w punktach przegięcia,

7. Sporządzenie wykresu.

\* - czynności wykonywane w drugiej kolejności.

### Przykład 1.

$$f(x) = \begin{cases} |x| \ln |x| & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} -x \ln(-x) & \text{dla } x < 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \\ x \ln x & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$

1.  $D = \mathbb{R}$

2.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$

3a. Asymptoty ukośne  $y = ax + b$ :  $a : \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty, \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$  - nie ma asymptot ukośnych

3b. funkcja jest ciągła dla wszystkich  $x \in \mathbb{R}$ , nie ma więc asymptot pionowych

4. pochodna

$$f'(x) = \begin{cases} -\ln(-x) - 1 & \text{dla } x < 0 \\ \ln(x) + 1 & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$
$$f'_-(0) = \infty, f'_+(0) = -\infty$$

5.  $f'(x) = 0$ :  $f'(-e^{-1}) = 0, f'(e^{-1}) = 0$

6.  $f''(x)$

$$f''(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & \text{dla } x < 0 \\ \frac{1}{x} & \text{dla } x > 0 \end{cases}$$
$$f''(x) > 0 \text{ dla } x \neq 0.$$

Zapisujemy otrzymane informacje w tabelce poniżej

| $x$      | $-\infty$ |   | $-1$ |   | $-e^{-1}$ |   | $0$ |   | $e^{-1}$ |   | $1$ |   | $\infty$ |
|----------|-----------|---|------|---|-----------|---|-----|---|----------|---|-----|---|----------|
| $f''(x)$ | +         | + | +    | + | +         | + |     | + | +        | + | +   | + |          |
| $f'(x)$  |           | - | -    | - | $0$       | + |     | - | $0$      | + | +   | + |          |
| $f(x)$   | $\infty$  |   |      |   |           |   | $0$ |   |          |   |     |   | $\infty$ |

**Twierdzenia o wartości średniej.**

1. Twierdzenie Rolle'a. Jeżeli funkcja  $f$  spełnia warunki:

1. jest ciągła na  $[a, b]$ ,
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na  $(a, b)$ ,
3.  $f(a) = f(b)$ ,

to istnieje punkt  $c \in (a, b)$  taki, że  $f'(c) = 0$ .

2. Twierdzenie Lagrange'a. Jeżeli funkcja  $f$  spełnia warunki:

1. jest ciągła na  $[a, b]$ ,
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na  $(a, b)$ ,

to istnieje punkt  $c \in (a, b)$  taki, że  $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ .

3. Twierdzenie Cauchy'ego. Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  spełniają warunki:

1. są ciągłe na  $[a, b]$ ,
2. mają pochodne właściwe lub niewłaściwe na  $(a, b)$ ,
3.  $g'(x) \neq 0$  dla każdego  $x \in (a, b)$ ,

to istnieje punkt  $c \in (a, b)$  taki, że  $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ .

### Reguła l'Hospitala obliczanie granic w przypadku wyrażeń nieoznaczonych

1. Twierdzenie (reguła de l'Hospitala dla nieoznaczności  $\frac{0}{0}$ ). Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  spełniają warunki:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ , przy czym  $g(x) \neq 0$  dla  $x \in S(x_0)$ ,
2. istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (właściwa lub niewłaściwa),

to istnieje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

2. Twierdzenie (reguła de l'Hospitala dla nieoznaczności  $\frac{\infty}{\infty}$ ). Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  spełniają warunki:

1.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$ ,
2. istnieje granica  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  (właściwa lub niewłaściwa),

to istnieje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

**Uwaga.** Reguła de l'Hospitala jest prawdziwa także dla granic jednostronnych oraz dla granic w  $-\infty$  lub  $\infty$ .

**Przykład 2.** Obliczyć podane granice

$$a) \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

$$b) \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x}}_{\frac{-\infty}{-\infty}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln \sin x)'}{(\ln \operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sin x)' / \sin x}{(\operatorname{tg} x)' / \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x / \sin x}{(1 / \cos^2 x) \cdot \cos x / \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \cos^2 x = 1,$$

$$c) \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{x^3}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x + 1)'}{(x^3)'} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(3x^2)'} = \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(6x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty.$$

Tożsamości zmieniające rodzaje nieoznaczoności

| Nieoznaczoność            | Stosowana tożsamość                | Otrzymana nieoznaczoność                  |
|---------------------------|------------------------------------|-------------------------------------------|
| $0 \cdot \infty$          | $f \cdot g = \frac{f}{1/g}$        | $\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$ |
| $\infty - \infty$         | $f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/(fg)}$ | $\frac{0}{0}$                             |
| $1^\infty, \infty^0, 0^0$ | $f^g = e^{g \ln f}$                | $\frac{0}{0}$ lub $0 \cdot \infty$        |

## Rozwinięcie Taylora funkcji (wzór Taylora)

Założenie

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła
- istnieją pochodne  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$  dla  $x \in (a, b)$   
Wtedy dla każdego  $x, x_0 \in (a, b)$ , zachodzi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi), \text{ dla pewnego } \xi \in (x_0, x)$$

Zastosowanie

- wykorzystanie do przybliżonych obliczeń - przybliżenie wielomianowe rzędu  $n$  funkcji  $f(x)$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

błąd przybliżenia:  $R_n = \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$  dla pewnego  $\xi \in (x_0, x)$

**Przykład 3.** różniczka  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$  - przybliżenie I rzędu

**Przykład 4.**  $f(x) = \sin x, |f^{(n+1)}(x)| \leq 1$ . Stąd

$$|R_n| \leq \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} \leq \frac{(b - a)^{(n+1)}}{(n+1)!} \rightarrow 0,$$

dla  $x_0, x \in (a, b)$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

**Przykład 5.**  $f(x) = e^x, |f^{(n+1)}(x)| = e^x$ . Stąd

$$|R_n| \leq \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} e^{x_0} \leq \frac{(b - a)^{(n+1)}}{(n+1)!} e^b \rightarrow 0,$$

dla  $x_0, x \in (a, b)$ , gdy  $n \rightarrow \infty$ .

**Definicja.** (funkcje pierwotne) Funkcja  $F$  jest funkcją pierwotną funkcji  $f$  na przedziale  $I$ , jeżeli

$$F'(x) = f(x) \text{ dla każdego } x \in I.$$

**Twierdzenie.** (podstawowe o funkcjach pierwotnych) Niech  $F$  będzie funkcją pierwotną funkcji  $f$  na przedziale  $I$ . Wtedy

- $G(x) = F(x) + C$ , gdzie  $C \in \mathbb{R}$  jest funkcją pierwotną
- każdą funkcję pierwotną funkcji  $f$  na  $I$  można przedstawić w postaci  $F(x) + D$ , gdzie  $D \in \mathbb{R}$ .

**Uwaga.** Powyższe twierdzenie mówi o postaci funkcji pierwotnych dla ustalonej funkcji. Funkcje pierwotne mają postać  $F(x) + C$  i tylko takie są funkcjami pierwotnymi.

**Twierdzenie.** (warunek wystarczający istnienia funkcji pierwotnej) Jeżeli funkcja jest ciągła na przedziale, to ma funkcję pierwotną na tym przedziale.

**Uwaga.** Funkcja pierwotna funkcji elementarnej nie musi być funkcją elementarną. Np. pierwotne funkcje

$$\frac{1}{\ln x}, e^{-x^2}, \frac{e^x}{x}, \frac{\sin x}{x}, \sqrt{\sin x}, \sin x^2, \sqrt{x} \sin x,$$

nie są funkcjami elementarnymi.

**Definicja.** (całka nieoznaczona) Niech  $F$  będzie funkcją pierwotną funkcji  $f$  na przedziale  $I$ . Całkę nieoznaczoną funkcji  $f$  na przedziale  $I$  nazywamy zbiór funkcji  $\{F(x) + C : C \in \mathbb{R}\}$ . Całkę nieoznaczoną funkcji  $f$  oznaczamy przez

$$\int f(x) dx$$

**Fakt.** (pochodna całki nieoznaczonej, całka nieoznaczona pochodnej)

1. Niech funkcja  $f$  ma funkcję pierwotną na przedziale  $I$ . Wtedy dla każdego  $x \in I$

$$\left[ \int f(x) dx \right]' = f(x)$$

2. Niech funkcja  $f$  ma pochodną na przedziale  $I$ . Wtedy dla każdego  $x \in I$

$$\int f'(x) dx = f(x) + C, \text{ gdzie } C \in \mathbb{R}$$

### Całki nieoznaczone ważniejszych funkcji elementarnych

1.  $\int 0 dx = C$  dla  $x \in \mathbb{R}$
2.  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$  dla  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $x \in \mathbb{R}$
3.  $\int x^p dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C$  dla  $p \in \{-2, -3, -4, \dots\}$ ,  $x \in (-\infty, 0)$  lub  $x \in (0, \infty)$
4.  $\int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C$  dla  $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
5.  $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$  dla  $x \in (-\infty, 0)$  lub  $x \in (0, \infty)$
6.  $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$  dla  $0 < a \neq 1$  oraz  $x \in \mathbb{R}$
7.  $\int e^x dx = e^x + C$  dla  $x \in \mathbb{R}$
8.  $\int \sin x dx = -\cos x + C$  dla  $x \in \mathbb{R}$
9.  $\int \cos x dx = \sin x + C$  dla  $x \in \mathbb{R}$
10.  $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$  dla  $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$
11.  $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$  dla  $x \in (\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi)$ , gdzie  $k \in \mathbb{Z}$
12.  $\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$  dla  $x \in \mathbb{R}$
13.  $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C$  dla  $x \in (-1, 1)$
14.  $\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$  dla  $x \in \mathbb{R}$
15.  $\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$  dla  $x \in \mathbb{R}$
16.  $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{ctgh} x + C$  dla  $x \in (-\infty, 0)$  lub  $x \in (0, \infty)$
17.  $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{tgh} x + C$  dla  $x \in \mathbb{R}$
18.  $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C$  dla  $x \in \mathbb{R}$

**Twierdzenie.** (o liniowości całki nieoznaczonej) Niech funkcje  $f$  i  $g$  mają funkcje pierwone oraz niech  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . Wtedy

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int f(x) dx + \beta \int g(x) dx.$$

**Twierdzenie.** (o całkowaniu przez części) Jeżeli funkcje  $f$  i  $g$  mają ciągłe pochodne, to

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx.$$

**Twierdzenie.** (o całkowaniu przez podstawienie) Jeżeli

1. funkcja  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  jest ciągła na przedziale  $I$
2. funkcja  $\phi : J \rightarrow I$  ma ciągłą pochodną na przedziale  $J$ ,

to

$$\int f(x)dx = \int f(\phi(t))\phi'(t)dt = F(\phi(t)) + C,$$

gdzie  $F$  jest dowolną funkcją pierwotną funkcji  $f$  oraz  $C \in \mathbb{R}$ .