

Całkowanie wyrażeń wymiernych

$$W(x) = \frac{U(x)}{V(x)},$$

$$U(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + a_{m-2} x^{m-2} + \dots + a_1 x + a_0,$$

$$V(x) = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0.$$

Założenie: $n > m$.

Przykład 1. Dlaczego zakładamy, że $n > m$, wyjaśnia przykład

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1}, \quad x^3 - x^2 + 1 : x^2 + 1 = x - 1 \text{ reszta } -x + 2$$

$$\frac{x^3 - x^2 + 1}{x^2 + 1} = x - 1 + \frac{-x + 2}{x^2 + 1}$$

Całkowanie ułamków prostych I rodzaju

$$(1) \quad \int \frac{1}{x-a} dx = \ln |x-a| + C$$

$$(2) \quad \int \frac{1}{(x-a)^n} dx = \frac{1}{-n+1} \frac{1}{(x-a)^{n-1}} + C$$

Całkowanie ułamków prostych II rodzaju

$$\frac{Px+Q}{(x^2+px+q)^n}, \quad \text{gdzie } \Delta = p^2 - 4q < 0.$$

1. przypadek $n = 1$

a)

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx, \quad \text{podstawienie } x = at, \quad dx = a dt$$

$$\int \frac{1}{x^2 + a^2} dx = \int \frac{1}{(at)^2 + a^2} a dt = \frac{1}{a} \int \frac{1}{t^2 + 1} dt =$$

$$\frac{1}{a} \arctan t + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C.$$

b)

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx,$$

$$\text{podstawienie } t = x + \frac{p}{2}, \quad x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (-1) \left(\frac{p^2}{4} - q\right) =$$

$$t^2 + a^2, \quad a^2 = -\frac{p^2 - 4q}{4}, \quad dx = dt$$

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} + C = \frac{1}{a} \arctan \frac{x + \frac{p}{2}}{a} + C.$$

c)

$$\int \frac{Px+Q}{x^2+px+q} dx = \int \left(\frac{\alpha(2x+p)}{x^2+px+q} + \frac{\beta}{x^2+px+q} \right) dx$$

$$\int \frac{\alpha(2x+p)}{x^2+px+q} dx = \alpha \ln |x^2+px+q| + C$$

zastosowaliśmy tu podstawienie $z = x^2 + px + q$, $dz = (2x + p)dx$

$$\int \frac{1}{x^2 + px + q} dx, \quad \text{postępujemy jak w b)}$$

2. przypadek $n > 1$

a) Wzór rekurencyjny

$$\int \frac{1}{(x^2 + a^2)^n} dx = \frac{x}{2(n-1)a^2(x^2 + a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2(n-1)a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n-1}}.$$

b)

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx,$$

stosujemy podstawienie $t = x + \frac{p}{2}$,

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (-1)\left(\frac{p^2}{4} - q\right) = t^2 + a^2, \quad a^2 = -\frac{p^2 - 4q}{4}, \quad dx = dt$$

$$\int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \frac{1}{(t^2 + a^2)^n} dt, \text{ dalej stosujemy wzór rekurencyjny w a)}$$

c)

$$\int \frac{Px + Q}{(x^2 + px + q)^n} dx = \int \left(\frac{\alpha(2x + p)}{(x^2 + px + q)^n} + \frac{\beta}{(x^2 + px + q)^n} \right) dx$$

$$\int \frac{\alpha(2x + p)}{(x^2 + px + q)^n} dx = \frac{\alpha}{-n+1} \cdot \frac{1}{(x^2 + px + q)^{n-1}} + C$$

zastosowaliśmy tu podstawienie $z = x^2 + px + q$, $dz = (2x + p)dx$

$$\text{całkę } \int \frac{1}{(x^2 + px + q)^n} dx \text{ (obliczamy jak w b)}$$

Algorytm całkowania funkcji wymiernych

1. Funkcję wymierną zapisujemy w postaci sumy wielomianu $W(x)$ (być może zerowego) i funkcji wymiernej właściwej.

$$\frac{U(x)}{V(x)} = W(x) + \frac{U_1(x)}{V_1(x)}, \quad \text{st}(U_1(x)) < \text{st}(V_1(x)), \quad \text{st}(W(x)) \geq 0.$$

2. Mianownik funkcji wymiernej właściwej rozkładamy na czynniki liniowe i kwadratowe nierozkładalne.

$$\begin{aligned} V(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x^1 + a_0 = \\ &= a_n (x - \alpha_1)^{n_1} (x - \alpha_2)^{n_2} (x - \alpha_3)^{n_3} \dots (x - \alpha_k)^{n_k} \\ &= (x^2 + p_1 x + q_1)^{m_1} (x^2 + p_2 x + q_2)^{m_2} \dots (x^2 + p_l x + q_l)^{m_l} \\ \Delta_i &= p_i^2 - 4q_i < 0, \quad i = 1, 2, \dots, l. \end{aligned}$$

3. Zapisujemy rozkład (teoretyczny) funkcji wymiernej właściwej na sumę ułamków prostych pierwszego i drugiego rodzaju.

$$\begin{aligned}
\frac{U(x)}{V(x)} &= \frac{A_1^1}{x - \alpha_1} + \frac{A_2^1}{(x - \alpha_1)^2} + \frac{A_3^1}{(x - \alpha_1)^3} + \dots + \frac{A_{n_1}^1}{(x - \alpha_1)^{n_1}} + \\
&\frac{A_1^2}{x - \alpha_2} + \frac{A_2^2}{(x - \alpha_2)^2} + \frac{A_3^2}{(x - \alpha_2)^3} + \dots + \frac{A_{n_2}^2}{(x - \alpha_2)^{n_2}} + \\
&\dots + \\
&\frac{A_1^k}{x - \alpha_k} + \frac{A_2^k}{(x - \alpha_k)^2} + \frac{A_3^k}{(x - \alpha_k)^3} + \dots + \frac{A_{n_k}^k}{(x - \alpha_k)^{n_k}} + \\
&\frac{C_1^1 x + D_1^1}{x^2 + p_1 x + q_1} + \frac{C_2^1 x + D_2^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^2} + \frac{C_3^1 x + D_3^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^3} + \dots + \frac{C_{n_1}^1 x + D_{n_1}^1}{(x^2 + p_1 x + q_1)^{n_1}} + \\
&\frac{C_1^2 x + D_1^2}{x^2 + p_2 x + q_2} + \frac{C_2^2 x + D_2^2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^2} + \frac{C_3^2 x + D_3^2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^3} + \dots + \frac{C_{n_2}^2 x + D_{n_2}^2}{(x^2 + p_2 x + q_2)^{n_2}} + \\
&\dots + \\
&\frac{C_1^l x + D_1^l}{x^2 + p_l x + q_l} + \frac{C_2^l x + D_2^l}{(x^2 + p_l x + q_l)^2} + \frac{C_3^l x + D_3^l}{(x^2 + p_l x + q_l)^3} + \dots + \frac{C_{n_l}^l x + D_{n_l}^l}{(x^2 + p_l x + q_l)^{n_l}}
\end{aligned}$$

4. Znajdujemy nieznanne współczynniki tego rozkładu.

$$\begin{aligned}
&A_1^1, A_2^1, A_3^1, \dots, A_{n_1}^1, \\
&A_1^2, A_2^2, A_3^2, \dots, A_{n_2}^2, \\
&\dots \\
&A_1^k, A_2^k, A_3^k, \dots, A_{n_k}^k, \\
&C_1^1, C_2^1, C_3^1, \dots, C_{m_1}^1, \\
&C_1^2, C_2^2, C_3^2, \dots, C_{m_2}^2, \\
&\dots \\
&C_1^l, C_2^l, C_3^l, \dots, C_{m_l}^l, \\
&D_1^1, D_2^1, D_3^1, \dots, D_{m_1}^1, \\
&D_1^2, D_2^2, D_3^2, \dots, D_{m_2}^2, \\
&\dots \\
&D_1^l, D_2^l, D_3^l, \dots, D_{m_l}^l,
\end{aligned}$$

5. Obliczamy całki poszczególnych składników rozkładu funkcji wymiernej, tj. wielomianu i ułamków prostych.

Zadanie 1.

$$a) \int \frac{2x+4}{x^3-2x^2} dx, \quad b) \int \frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} dx, \quad c) \int \frac{x+2}{x^2+9} dx, \quad d) \int \frac{x^2+1}{(x^2+2x+3)^2} dx,$$

a)

$$\frac{2x+4}{x^3-2x^2} = \frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{A_1}{x-2} + \frac{A_2}{x} + \frac{A_3}{x^2} = \frac{A_1 x^2 + A_2(x-2)x + A_3(x-2)}{x^2(x-2)}$$

$$x^2 : A_1 + A_2 = 0$$

$$x : -2A_2 + A_3 = 2$$

$$x^0 : -2A_3 = 4$$

$$A_1 = 2, A_2 = -2, A_3 = -2$$

$$\frac{2x+4}{x^2(x-2)} = \frac{2}{x-2} + \frac{-2}{x} + \frac{-2}{x^2}$$

b)

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{(x-1)^2} = \frac{A_1(x-1)^2 + A_2(x-1)x + A_3x}{x(x-1)^2}$$

$$x^2 : A_1 + A_2 = 2$$

$$x : -2A_1 - A_2 + A_3 = 0$$

$$x^0 : A_1 = 3$$

$$A_1 = 3, A_2 = -1, A_3 = 5$$

$$\frac{2x^2+3}{x(x-1)^2} = \frac{3}{x} + \frac{-1}{x-1} + \frac{5}{(x-1)^2}$$

c)

$$\frac{x+2}{x^2+9} = \frac{1}{2} \frac{2x}{x^2+9} + \frac{2}{x^2+9}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2+9} dx = \frac{1}{2} \ln|x^2+9| + C,$$

zastosowaliśmy podstawienie $z = x^2 + 9$, $dz = 2x dx$

$$\int \frac{2}{x^2+9} dx = \frac{2 \cdot 3}{9} \int \frac{dz}{z^2+1} = \arctg z + C = \frac{2}{3} \arctg \frac{x}{3} + C,$$

zastosowaliśmy podstawienie $x = 3z$, $dx = 3dz$.

d)

$$\frac{x^2+1}{(x^2+2x+3)^2} = \frac{1}{x^2+2x+3} + \frac{-2x-2}{(x^2+2x+3)^2}$$

$$- \int \frac{2x+2}{(x^2+2x+3)^2} dx = - \int \frac{dz}{z^2} = \frac{1}{z} + C = \frac{1}{x^2+2x+3} + C,$$

zastosowaliśmy podstawienie $z = x^2 + 2x + 3$, $dz = (2x+2)dx$

$$\int \frac{1}{x^2+2x+3} dx = \int \frac{dz}{z^2+2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{z}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctg \frac{x+1}{\sqrt{2}} + C,$$

zastosowaliśmy podstawienie $z = x + 1$, $dx = dz$.

Całki nieoznaczone postaci $\int \sin^n x \cos^m x dx$ i $\int \sin ax \cos bxdx$

Przydatne wzory

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \sin \beta \cos \alpha$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \pm \sin \alpha \sin \beta$$

$$2 \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)$$

$$2 \cos \alpha \cos \beta = \cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)$$

$$2 \sin \alpha \sin \beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

Zadanie 2.

$$\begin{array}{lll}
a) \int \sin^2 x \, dx, & b) \int \sin x \cos^5 x \, dx, & c) \int \sin^2 x \cos^4 x \, dx, \\
d) \int \sin 2x \cos 4x \, dx, & e) \int \sin x \sin 3x \, dx, & f) \int \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{3} \, dx.
\end{array}$$

Całkowanie funkcji postaci $R(\sin x, \cos x)$, gdzie $R(u, v)$ jest wyrażeniem wymiernym

Warunek	Podstawienie	Przedstawienie funkcji	Różniczka
$R(-u, v) = -R(u, v)$	$t = \cos x$	$\sin x = \sqrt{1 - t^2}$	$dx = \frac{-dt}{\sqrt{1 - t^2}}$
$R(u, -v) = -R(u, v)$	$t = \sin x$	$\cos x = \sqrt{1 - t^2}$	$dx = \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}$
$R(-u, -v) = R(u, v)$	$t = \operatorname{tg} x$	$\sin x = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2}}$ $\cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2}}$	$dx = \frac{dt}{1 + t^2}$
R- dowolna funkcja	$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$	$\sin x = \frac{2t}{1 + t^2}$ $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$	$dx = \frac{2dt}{1 + t^2}$

Zadanie 3.

$$\begin{array}{lll}
a) \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}, & b) \int \frac{\sin^4 x \, dx}{\cos x}, & c) \int \frac{dx}{1 + 4 \cos x}, \\
d) \int \frac{(2 \sin x + 3 \cos x) dx}{\sin^2 x \cos x + 9 \cos^3 x}, & e) \int \frac{dx}{1 + \operatorname{tg} x}, & f) \int \frac{\operatorname{tg} 2x \, dx}{\operatorname{tg} x},
\end{array}$$

Całkowanie funkcji z niewymiernościami

Całki postaci $\int R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 + a^2}) dx$, $\int R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) dx$, gdzie $R(u, v)$ jest wyrażeniem wymiernym

Warunek	Podstawienie	Przedstawienie funkcji	Różniczka
$R(x, \sqrt{a^2 - x^2})$	$x = a \sin t$	$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t$	$dx = a \cos t \, dt$
$R(x, \sqrt{x^2 - a^2})$	$x = a \cosh t$	$\sqrt{x^2 - a^2} = a \sinh t$	$dx = a \sinh t \, dt$
$R(x, \sqrt{x^2 + a^2})$	$x = a \sinh t$	$\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh t$	$dx = a \cosh t \, dt$

Zadanie 4.

$$\begin{array}{lll}
a) \int x \sqrt{4 - x^2} \, dx, & b) \int \sqrt{1 - x^2} \, dx, & c) \int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x} \, dx, \\
d) \int \frac{(x+2) dx}{\sqrt{x^2 - 1}}, & e) \int \frac{(x-2) dx}{\sqrt{x^2 + 1}}, & f) \int \sqrt{x^2 + 4} \, dx.
\end{array}$$