

Zagadnienia omawiane na wykładzie w dniu 12.12.2023r

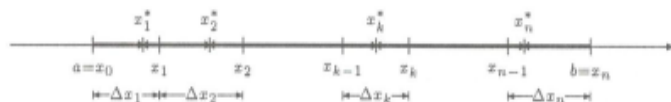
Całki oznaczone

Oznaczenia

Podział P przedziału $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < x_2 < x_3 < \dots < x_n = b$

Średnica podziału P : $\delta(P) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \Delta x_k$, gdzie $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$, $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Wybór punktów pośrednich $\{x_k^*\}$ w przedziałach $[x_k, x_{k+1}]$: $x_k \leq x_k^* \leq x_{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$



Rys. 8.1.1. Podział odcinka i punkty pośrednie.

Przyjmujemy:

$$m_k = \inf\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, M_k = \sup\{f(x) : x_k \leq x \leq x_{k+1}\}, k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Zauważamy, że $m_k \leq f(x_k^*) \leq M_k$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Sumy całkowite:

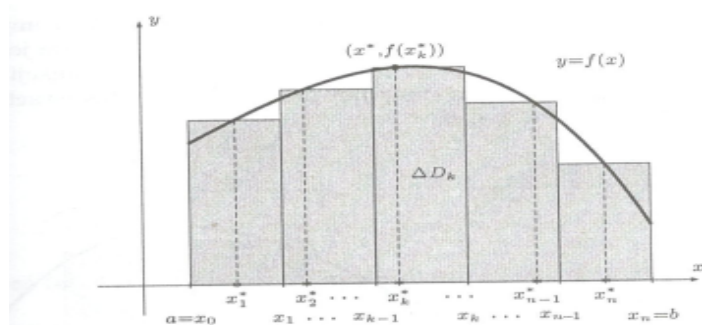
$$\text{suma dolna całkowita } \underline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k$$

$$\text{suma górna całkowita } \overline{S}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

$$\text{suma całkowita } S(f, P) = \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

Zauważamy, że

$$\underline{S}(f, P) \leq S(f, P) \leq \overline{S}(f, P)$$



Rys. 8.1.2. Aproksymacja pola trapezu krywoliniowego.

Definicja (całka oznaczona Riemanna)

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$. Jeżeli istnieją granice

$$\lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k \quad \text{ i } \quad \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

oraz są sobie równe, to ich wspólną wartość oznaczamy symbolem $\int_a^b f(x)dx$, czyli

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n m_k \Delta x_k = \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n M_k \Delta x_k$$

i nazywamy całką Riemanna. Liczby a i b nazywamy odpowiednio dolną i górną granicą całkowania. Ponadto przyjmujemy

$$\begin{aligned} 1. \quad & \int_a^a f(x)dx = 0 \\ 2. \quad & \int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx \end{aligned}$$

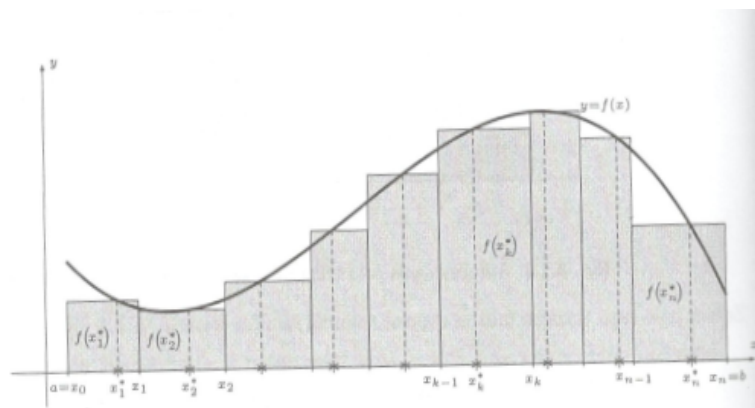
Definicja równoważna

Definicja (całka oznaczona Riemanna)

Niech funkcja f będzie ograniczona na przedziale $[a, b]$. Całką oznaczoną Riemanna z funkcji f na przedziale $[a, b]$ nazywamy liczbę, którą oznaczmy symbolem $\int_a^b f(x)dx$ i definiujemy wzorem

$$\int_a^b f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{\delta(P) \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(x_k^*) \Delta x_k$$

o ile po prawej stronie znaku równości granica istnieje oraz nie zależy od sposobu podziałów P przedziału $[a, b]$ ani od sposobów wyboru punktów pośrednich x_k^* , gdzie $1 \leq k \leq n$. Funkcje, dla których istnieje całka Riemanna nazywamy funkcjami całkowalnymi.



Rys. 8.1.4. Suma całkowita funkcji.

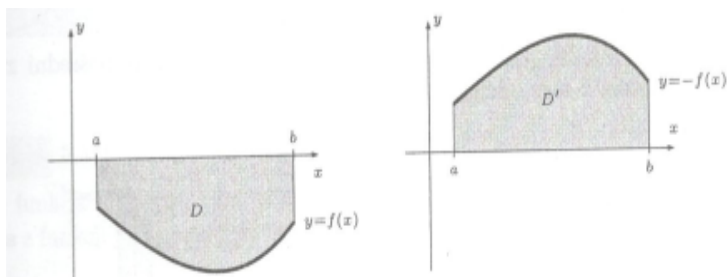
Twierdzenie (warunek wystarczający całkowalności funkcji)

Jeżeli funkcja f jest ograniczona na przedziale $[a, b]$ i ma na tym przedziale skończoną liczbę punktów nieciągłości pierwszego rodzaju, to jest na nim całkowalna.

1. Obliczanie całek przy pomocy sumy całkowitej podziału równomiernego:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \right].$$

2. Interpretacja geometryczna całki Riemanna - pole powierzchni pod wykresem.



Rys. 8.1.3.

3. Całka oznaczona z funkcji wektorowej

Przykład 1. Punkt materialny porusza się na płaszczyźnie z prędkością $\vec{v}(t) = (v_1(t), v_2(t))$, $t_0 \leq t \leq t_k$. Niech $\mathbf{x}_0$ i $\mathbf{x}_k$ będą położeniami odpowiednio w chwili początkowej t_0 i końcowej t_k . Wtedy

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^{t_k} \vec{v}(t) dt = \mathbf{x}_0 + \left(\int_{t_0}^{t_k} v_1(t) dt, \int_{t_0}^{t_k} v_2(t) dt \right)$$

4. Podstawowe twierdzenie rachunku całkowego

Zał.

1. $f(x)$ jest funkcją ciągłą i $F(x) = \int f(x) dx$ jest funkcją pierwotną funkcji $f(x)$. Wtedy

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Oznaczenie: $F(b) - F(a) = F(X)|_a^b = [F(x)]_a^b$.

5. Metody obliczania całek oznaczonych

a) całkowanie przez części: $\int_a^b f(x)g'(x) dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x) dx$.

b) całkowanie przez podstawienie: $\int_a^b f(g(t))g'(t) dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x) dx$.

(należy zwrócić uwagę jak zmieniają się granice całkowania)

Przykład 2. $\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx$, $z = \sqrt{x+1}$, $x = z^2 - 1$, $dx = (z^2 - 1)' dz = 2z dz$ (tu $g(z) = z^2 - 1$),

zmiana granic całkowania: $x = 0 \rightarrow z = 1$, $x = 1 \rightarrow z = \sqrt{2}$

$$\int_0^1 x\sqrt{x+1} dx = \int_1^{\sqrt{2}} (z^2 - 1) \cdot z \cdot 2z dz = \int_1^{\sqrt{2}} 2z^4 - 2z^2 dz = \left[\frac{2}{5} z^5 - \frac{2}{3} z^3 \right]_1^{\sqrt{2}} = \dots$$

6. Twierdzenia o całkach oznaczonych

a) $\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$

b) jeżeli funkcja $f(x)$ jest całkowalna i funkcja $g(x)$ różni się od $f(x)$ tylko w skończonej liczbie punktów przedziału $[a, b]$, to funkcja $g(x)$ jest całkowalna i $\int_a^b f(x) dx = \int_a^b g(x) dx$

c) $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$

d) jeżeli $f(x) \leq g(x)$ dla $x \in [a, b]$ i funkcje $f(x)$ i $g(x)$ są całkowne, to $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$

w szczególności: jeżeli $m \leq f(x) \leq M$ dla $x \in [a, b]$, to

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$
$$\left(\int_a^b m dx = [mx]_a^b = m(b-a), \int_a^b M dx = M(b-a) \right)$$

e) jeżeli funkcja f jest całkowna na przedziale $[a, b]$, to zachodzi nierówność

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

7. Wartość średnia całki

$$f_{\text{sr}} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Przykład 3. Niech moc prądu dostarczanego do urządzenia wynosi $P = P(t)$, $t_0 \leq t \leq t_k$. Energia elektryczna dostarczona do urządzenia w przedziale czasu $[t_0, t_k]$ wynosi $W = \int_{t_0}^{t_k} P(t)dt$. Średnia wartość

energii dostarczanej w jednostce czasu wynosi: $W_{\text{sr}} = \frac{1}{t_k - t_0} \int_{t_0}^{t_k} P(t)dt$

Przykład 4. Niech punkt materialny porusza się po prostej z przyspieszeniem $a = a(t)$, $t_0 \leq t \leq t_k$. Prędkość punktu materialnego w chwili t wynosi zatem $v(t) = v_0 + \int_{t_0}^t a(z)dz$, gdzie v_0 jest prędkością punktu w chwili początkowej t_0 . Średnia wartość przyspieszenia: $a_{\text{sr}} = \frac{v(t_k) - v_0}{t_k - t_0} = \frac{1}{t_k - t_0} \int_{t_0}^{t_k} a(t)dt$

8. Funkcja górnej granicy całkowania

Niech f będzie funkcją całkowną na przedziale $[a, b]$. Określamy funkcję

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \text{ dla } x \in [a, b]$$

Własności $F(x)$:

1. $F(a) = 0$

2. $F(x)$ jest funkcją ciągłą.

Uzasadnienie:

$$|F(x+h) - F(x)| = \left| \int_x^{x+h} f(t)dt \right| \leq \int_x^{x+h} |f(t)|dt \leq M \cdot h,$$

gdzie $M = \sup_{a \leq x \leq b} |f(x)|$

Stąd wynika, że jeżeli $h \rightarrow 0$, to $F(x+h) \rightarrow F(x)$.

3. Jeżeli f jest ciągła w punkcie $x_0 \in [a, b]$, to istnieje pochodna $F'(x_0)$ i zachodzi równość

$$F'(x_0) = \frac{d}{dx} \int_a^x f(t)dt|_{x_0} = f(x_0)$$

Uzasadnienie: zauważamy, że

$$\frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt + f(x_0).$$

Stąd

$$\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) = \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt.$$

Ponieważ funkcja f jest ciągła w x_0 , dla dowolnego $\epsilon > 0$ istnieje $\delta > 0$ takie, że dla h spełniających nierówność $|h| < \delta$ zachodzi

$$|f(t) - f(x_0)| < \epsilon$$

dla dowolnego $t \in (x_0 - h, x_0 + h)$. Stąd wynika, że

$$\left| \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| = \left| \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} (f(t) - f(x_0)) dt \right| < \epsilon,$$

o ile $|h| < \delta$. To oznacza, że

$$F'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} = f(x_0),$$

co należało udowodnić.

Wniosek. Jeżeli f jest ciągła w przedziale $[a, b]$, to funkcja

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \text{ dla } x \in [a, b]$$

jest funkcją pierwotną funkcji f taką, że $F(a) = 0$.

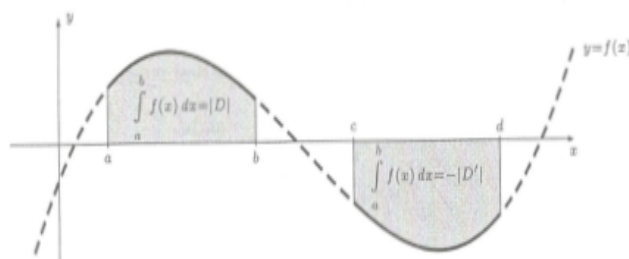
Zauważmy, że

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) = F(b) - F(a), \text{ (bo } F(a) = 0)$$

W tym przypadku zauważamy ścisły związek całki nieoznaczonej i oznaczonej, co usprawiedliwia stosowanie podobnych oznaczeń.

Zastosowania całki oznaczonej

1. Obliczanie pola powierzchni figur na płaszczyźnie



Rys. 8.1.7. Interpretacja geometryczna całki oznaczonej.

2. Długość krzywej zadanej parametrycznie $\gamma : (x(t), y(t))$ dla $t \in (\alpha, \beta)$. Wzór

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Uzasadnienie:

1. $\alpha = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = \beta$
2. Przybliżona długość krzywej

$$l \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i, \text{ gdzie } \Delta s_i = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2}$$

Stosujemy przybliżenia oparte na różniczkach $d(x, t_i)$ i $d(y, t_i)$

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) \approx d(x, t_i) = x'(t_i) \Delta t_i, \quad y(t_{i+1}) - y(t_i) \approx d(y, t_i) = y'(t_i) \Delta t_i$$

Stąd

$$\Delta s_i \approx \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2} \Delta t_i$$

$$l \approx \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i \approx \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(t_i)^2 + y'(t_i)^2} \Delta t_i$$

Ostatnia suma jest sumą całkową dla całki występującej we wzorze na długość krzywej.

Uwaga. W przypadku krzywej zadanej wzorem $y = f(x)$ dla $x \in [a, b]$ opis parametryczny jest następujący: $x = t, y = f(t)$ dla $t \in [a, b]$. Stąd wzór na długość krzywej przyjmuje postać

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$$

Dla krzywej w przestrzeni $\gamma : (x(t), y(t), z(t))$ dla $t \in (\alpha, \beta)$

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt$$

3. Objętość bryły w funkcji pola przekroju $S(x), x \in [a, b]$. Wzór

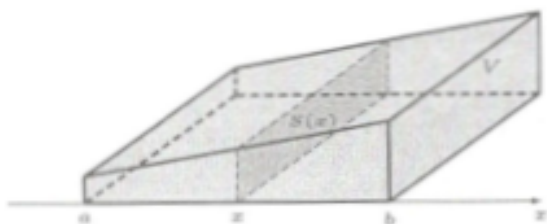
$$V = \int_a^b S(x) dx$$

Stosowane przybliżenie

$$\Delta V_i = S(x_i^*) \Delta x_i \quad x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$$

$$V = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta V_i = \sum_{i=0}^{n-1} S(x_i^*) \Delta x_i$$

Ostatnia suma jest sumą całkową dla całki we wzorze na objętość.

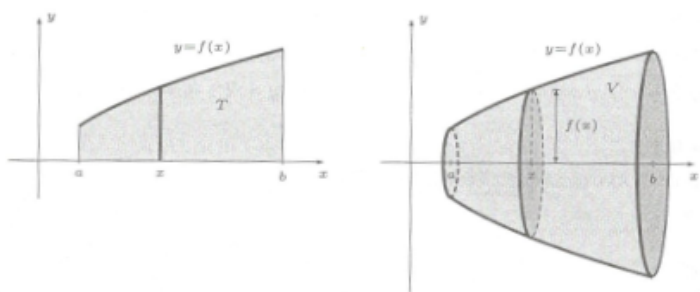


Rys. 9.1.4. Przekrój bryły płaszczyzną.

4a. Objętość bryły obrotowej, obrót wokół osi OX . Wzór

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

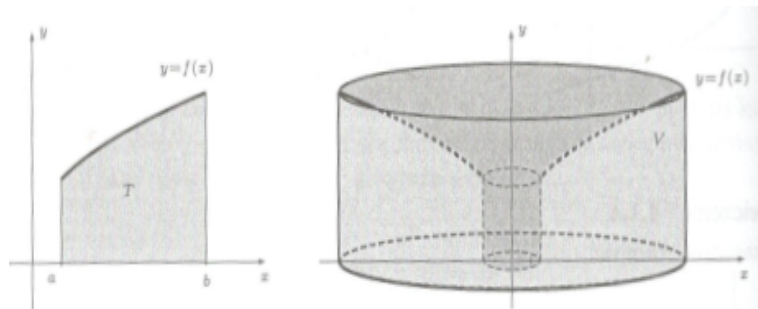
Uzasadnienie: tu funkcja pola przekroju ma postać: $S(x) = \pi f(x)^2$.



Rys. 9.1.2. Bryła powstała z obrotu trapezu krzywoliniowego wokół osi Ox .

4b. Objętość bryły obrotowej, obrót wokół osi OY . Wzór

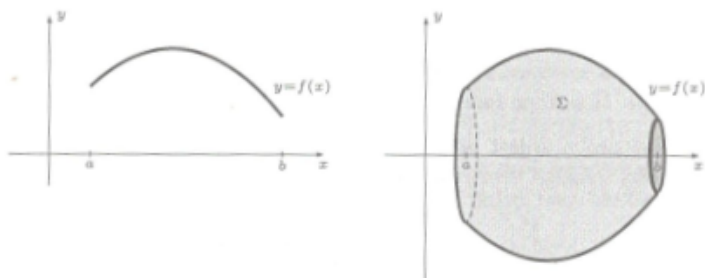
$$V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx$$



Rys. 9.1.3. Bryła powstała z obrotu trapezu krzywoliniowego wokół osi Oy .

5a. Pole powierzchni bryły obrotowej, obrót wokół osi OX . Wzór

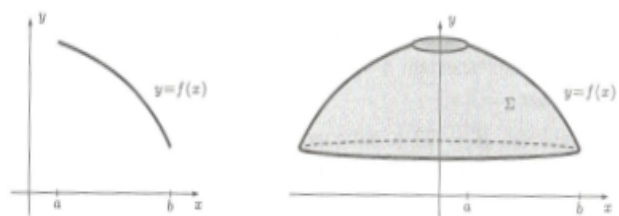
$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$



Rys. 9.1.6. Powierzchnia powstała z obrotu wykresu funkcji wokół osi Ox .

5b. Pole powierzchni bryły obrotowej, obrót wokół osi OY . Wzór

$$S = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$



Rys. 9.1.7. Powierzchnia powstała z obrotu wykresu funkcji wokół osi Oy .