

$2a$ - podstawa trójkąta, b - długość drugiego boku

r - promień koła wpisanego w trójkąt, S - pole powierzchni trójkąta

$h = \sqrt{b^2 - a^2}$ - wysokość trójkąta

Związki między elementami trójkąta

$$1. \quad S = ah = a\sqrt{b^2 - a^2}, \quad b = \sqrt{a^2 + \frac{S^2}{a^2}}$$

$$2. \quad S = r(a + b), \quad r = \frac{S}{a + b}$$

Niech $\phi(a) = a + b = a + \sqrt{a^2 + \frac{S^2}{a^2}}$, $0 \leq a < \infty$. Wtedy $r = \frac{S}{\phi(a)}$.

Analiza funkcji $\phi(a)$:

$$\phi(0) = \infty, \quad \phi(\infty) = \infty$$

$$\phi'(a) = 1 + \frac{1}{2} \frac{2a - 2\frac{S^2}{a^3}}{\sqrt{a^2 + \frac{S^2}{a^2}}} = 1 + \frac{a - \frac{S^2}{a^3}}{\sqrt{a^2 + \frac{S^2}{a^2}}},$$

Wyznaczamy minimum ϕ z warunku $\phi'(a) = 0$:

$$1 + \frac{a - \frac{S^2}{a^3}}{\sqrt{a^2 + \frac{S^2}{a^2}}} = 0$$

$$-\sqrt{a^2 + \frac{S^2}{a^2}} = a - \frac{S^2}{a^3}$$

$$a^2 + \frac{S^2}{a^2} = \left(a - \frac{S^2}{a^3}\right)^2 = a^2 - 2\frac{S^2}{a^2} + \frac{S^4}{a^6}$$

$$3\frac{S^2}{a^2} = \frac{S^4}{a^6}, \quad 3a^4 = S^2$$

$$\underline{b} = \sqrt{a^2 + \frac{S^2}{a^2}} = \sqrt{4a^2} = \underline{2a}$$

Wniosek: $\phi(a)$ osiąga minimum ($\phi'(a) = 0$), gdy trójkąt jest trójkątem równobocznym. Wtedy r osiąga największą swoją wartość.