

1. wykorzystamy fakt, że liczba π jest niewymierna

2. określamy ciąg liczb $0 \leq \alpha_n < 2\pi$: $n = \left[\frac{n}{2\pi} \right] 2\pi + \alpha_n$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Zauważamy, że $\sin n = \sin \alpha_n$. Naszym celem jest wykazanie, że zbiorem punktów skupienia ciągu $\{\alpha_n\}$ jest przedział $[0, 2\pi]$. Stąd będzie wynikać, że zbiorem punktów skupienia ciągu $\{\sin n\}$ jest przedział $[-1, 1]$.

3. w ciągu $\{\alpha_n\}$ żadne dwa wyrazy nie są sobie równe, uzasadnienie: założmy przeciwnie, że $\alpha_{n_1} = \alpha_{n_2}$, dla pewnych $n_1 \neq n_2$. Wtedy zachodziłaby równość

$$0 \neq n_2 - n_1 = \left(\left[\frac{n_2}{2\pi} \right] - \left[\frac{n_1}{2\pi} \right] \right) 2\pi,$$

co przeczy faktowi, że π jest niewymierne.

4. dla dowolnie wybranego $m \in \mathbb{N}$ rozważamy ciąg wyrazów $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$. Uporządkujmy je rosnąco $\alpha_{(0)} < \alpha_{(1)} < \alpha_{(2)} < \dots < \alpha_{(m)}$ i rozpatrzmy długości odcinków $[\alpha_{(0)}, \alpha_{(1)}], [\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}], \dots, [\alpha_{(m-1)}, \alpha_{(m)}]$. Wtedy co najmniej jeden z tych odcinków, np $[\alpha_{(i)}, \alpha_{(i+1)}]$ ma długość $d = \alpha_{(i+1)} - \alpha_{(i)} \leq \frac{2\pi}{m}$. Ponieważ $\alpha_{(i)} = \alpha_{n_1}$, $\alpha_{(i+1)} = \alpha_{n_2}$, dla pewnych n_1 i n_2 , otrzymujemy

$$n_2 - n_1 = \left(\left[\frac{n_2}{2\pi} \right] - \left[\frac{n_1}{2\pi} \right] \right) 2\pi + (\alpha_{n_2} - \alpha_{n_1})$$

Stąd dla liczby $n_0 = |n_2 - n_1|$ mamy przedstawienie

$$1. n_0 = \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + d,$$

i dalej

$$n_0 = \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + d, \quad 2n_0 = 2 \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + 2d, \quad 3n_0 = 3 \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + 3d, \quad \dots, \quad kn_0 = k \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + kd,$$

$$k = \left[\frac{2\pi}{d} \right],$$

gdy $n_2 - n_1 > 0$ lub

$$2. n_0 = \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + (2\pi - d),$$

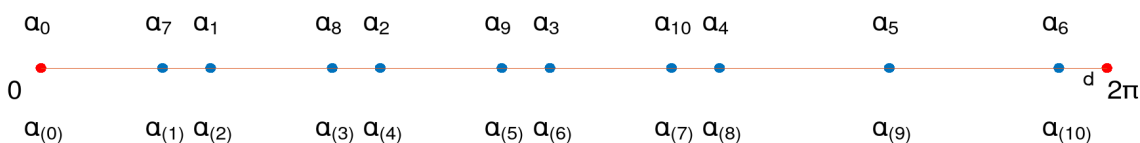
i dalej

$$n_0 = \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + (2\pi - d), \quad 2n_0 = 2 \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + 2\pi - 2d, \quad 3n_0 = 3 \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + 2\pi - 3d, \quad \dots,$$

$$kn_0 = k \left[\frac{n_0}{2\pi} \right] 2\pi + 2\pi - kd, \quad k = \left[\frac{2\pi}{d} \right]$$

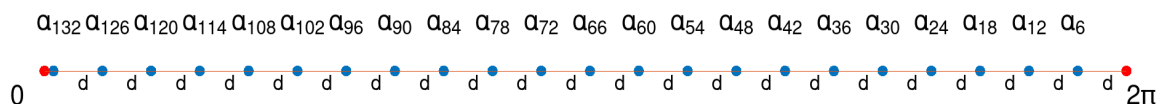
gdy $n_2 - n_1 < 0$.

dla ilustracji, przypadek $m = 10$



wyberamy np. $\alpha_{(1)}, \alpha_{(2)}$, $|\alpha_{(1)} - \alpha_{(2)}| = d \leq \frac{2\pi}{10}$, wtedy $n_1 = 7$, $n_2 = 1$ i $n_0 = |n_2 - n_1| = 6$, w ciągu liczb $\alpha_{n_0} = \alpha_6, \alpha_{12}, \alpha_{18}, \dots, \alpha_{132}$ odległość dwóch sąsiednich (=wartość bezwzględna różnicy) jest

stała i równa d .



Wniosek 1. Dla każdej liczby $\epsilon > 0$ można wskazać liczby naturalne $n_0, 2n_0, 3n_0, \dots, kn_0$ takie, że odpowiadające im wyrazy ciągu $\{\alpha_n\}$ dzielą przedział $[0, 2\pi]$ na odcinki długości nie większej niż $d = \frac{2\pi}{m} < \epsilon$.

Z tego wniosku wynika

Wniosek 2. W każdym przedziale $[a, b] \subset [0, 2\pi]$ istnieje co najmniej jeden wyraz ciągu $\{\alpha_n\}$.

Uzasadnienie: rozważyć opisany wyżej podział przedziału $[0, 2\pi]$ na odcinki długości mniejszej niż $b - a$.

Wniosek 3. Każda liczba $a \in [0, 2\pi]$ jest punktem skupienia ciągu α_n . Uzasadnienie: wybierając elementy α_{n_k} ciągu $\{\alpha_n\}$ z przedziałów $(a - \frac{1}{k}, a + \frac{1}{k})$, $k = 1, 2, \dots$ otrzymamy podciąg zbieżny do a .

Wniosek 4. Niech $y_0 \in [-1, 1]$. Ponieważ funkcja $\sin x$ jest ciągła, istnieje $x_0 \in [0, 2\pi]$ taki, że $\sin x_0 = y_0$. Z Wniosku 3 wynika, x_0 jest punktem skupienia ciągu $\{\alpha_n\}$, więc istnieje podciąg $\{\alpha_{n_k}\}$ taki, $\alpha_{n_k} \rightarrow x_0$. Stąd $\sin \alpha_{n_k} \rightarrow y_0$, co oznacz, że y_0 jest punktem skupienia ciągu $\{\sin \alpha_n = \sin n\}$.