

Zadanie 1. Zbadać, czy figura D ograniczona krzywą $y = \frac{8}{x^2+4}$ i osiami układu współrzędnych ma skończone pole.

Odp. 1.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{8}{x^2+4} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z^2+1} dz < \infty$$

$$z = 2x, \quad dz = 2dx$$

Zadanie 2. Wykazać, że granica $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-xy+y^2}$ nie istnieje.

Odp. 2.

$$1. \quad x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = \frac{1}{n} : \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n^2 - x_n y_n + y_n^2} = \frac{2}{n^2} : \frac{1}{n^2} = 2$$

$$2. \quad x_n = \frac{1}{n}, \quad y_n = -\frac{1}{n} : \frac{x_n^2 + y_n^2}{x_n^2 - x_n y_n + y_n^2} = \frac{2}{n^2} : \frac{3}{n^2} = \frac{2}{3}.$$

Zadanie 3. Obliczyć całkę $\iiint_U x^2 |z| dx dy dz$, gdzie U jest kulą $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ (zastosować współrzędne sferyczne).

Odp. 3.

$$x = r \cos \phi \cos \psi, \quad y = r \sin \phi \cos \psi, \quad z = r \sin \psi,$$

$$\det \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \psi & -r \sin \phi \cos \psi & -r \cos \phi \sin \psi \\ \sin \phi \cos \psi & r \cos \phi \cos \psi & -r \sin \phi \sin \psi \\ \sin \psi & 0 & r \cos \psi \end{bmatrix} =$$

$$r^2 \sin^2 \psi \cos \psi + r^2 \cos^3 \psi$$

$$0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \phi < 2\pi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \quad J(r, \phi, \psi) = r^2 \cos \psi$$

$$\iiint_U x^2 |z| dx dy dz = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^R r^3 \cos^2 \phi \cos^2 \psi |\sin \psi| r^2 \cos \psi dr =$$

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \phi d\phi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 \psi |\sin \psi| d\psi \int_0^R r^5 dr = \pi \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{6} R^6$$

Zadanie 4. Obliczyć pole płata Σ wyciętego z wykresu funkcji $z = 1 + x^2 + y^2$ walcem o równaniu $x^2 + y^2 = 3$. Sporządzić rysunek.

Odp. 4.

$$z = f(x, y) = 1 + x^2 + y^2, \quad f_x = 2x, \quad f_y = 2y,$$

$$D : x^2 + y^2 \leq 3,$$

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dx dy = \iint_D \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy,$$

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad J(r, \phi) = r, \quad 0 \leq r \leq \sqrt{3}, \quad 0 \leq \phi < 2\pi$$

$$|S| = \int_0^{2\pi} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{1 + 4r^2} r d\phi dr =$$

Zadanie 5. Wyznaczyć wartość najmniejszą i największą funkcji

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$$

na obszarze D określonym nierównościami $x \leq 0$, $|x| + |y| \leq 1$.

Odp. 5. wewnątrz obszaru:

$$f_x = 2x - y - 2 = 0, \quad f_y = -x + 2y + 1 = 0$$

$$3x - 3 = 0, \quad x = 1, \quad y = 0$$

Wniosek. Punkt $(x = 1, y = 0)$ podejrzany o istnienie w nim ekstremum lokalnego nie należy do obszaru.

brzeg obszaru:

$$x = 0, \quad -1 \leq y \leq 1 : g(y) = y^2 + y,$$

$$g_{\min} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}, \quad g_{\max} = g(1) = 2, \quad g(-1) = 0$$

$$x < 0, \quad y > 0 : |x| + |y| = 1, \quad y = x + 1,$$

$$g(x) = x^2 - x(x + 1) + (x + 1)^2 - 2x + x + 1 = x^2 + 2,$$

$$(x = 0, y = 1) : g_{\min} = g(0) = 2, \quad (x = -1, y = 0) : g_{\max} = g(-1) = 3$$

$$x < 0, \quad y < 0 : |x| + |y| = 1 \quad x = -y - 1,$$

$$g(y) = (-y - 1)^2 - y(-y - 1) + y^2 - 2(-y - 1) + y = 3y^2 + 6y + 3 = 3(y + 1)^2$$

$$x = -\frac{1}{2}, \quad y = -\frac{1}{2} : g_{\min} = g\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}, \quad (x = -1, y = 0) : g_{\max}(0) = 3$$

Zadanie 1. Promień podstawy stożka ma długość $R = 3$ m, a wysokość $H = 4$ m. Promień podstawy zwiększono o 2 cm, natomiast wysokość zmniejszono o 3 cm. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się pole powierzchni bocznej tego stożka.

Odp. 1.

$$S(R, H) = \pi R \sqrt{R^2 + H^2}$$

$$S_R = \pi \sqrt{R^2 + H^2} + \pi \frac{R^2}{\sqrt{R^2 + H^2}} = \pi \frac{2R^2 + H^2}{\sqrt{R^2 + H^2}}, \quad S_H = \pi \frac{HR}{\sqrt{R^2 + H^2}}$$

$$\delta S = \pi \frac{2R^2 + H^2}{\sqrt{R^2 + H^2}} \Delta R + \pi \frac{HR}{\sqrt{R^2 + H^2}} \Delta H = \frac{2 \cdot 3^2 + 4^2}{5} \pi \cdot 0.02 + \frac{3 \cdot 4}{5} \cdot 0.03$$

Zadanie 2. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} dx$.

Odp. 2.

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{e^x} dx = x(-e^{-x}) \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} < \infty$$

Zadanie 3. Wyznaczyć położenia środka masy cienkiej jednorodnej płytki w kształcie półkola o promieniu R . Zastosować współrzędne biegunowe.

Odp. 3.

$$m = \frac{1}{2} \pi R^2 \rho_0, \quad \rho(x, y) \equiv \rho_0$$

$$x_s = \frac{\iint_D x \rho(x, y) dx dy}{m}, \quad y_s = \frac{\iint_D y \rho(x, y) dx dy}{m},$$

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad 0 \leq r \leq R, \quad 0 \leq \phi \leq \pi, \quad J(r, \phi) = r$$

$$\iint_D y \rho(x, y) dx dy = \rho_0 \int_0^{\pi} \sin \phi d\phi \int_0^R r^2 dr = 2\rho_0 \cdot \frac{1}{3} R^3$$

$$\iint_D x \rho(x, y) dx dy = \rho_0 \int_0^{\pi} \cos \phi d\phi \int_0^R r^2 dr = 0$$

Zadanie 4. Spośród prostopadłościanów o ustalonej długości przekątnej $p = \sqrt{3}$ wybrać ten, które ma największą objętość.

Odp. 4.

$$\begin{cases} f(x, y, z) = xyz, \ x, y, z \geq 0 \\ g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - p^2 = 0 \end{cases}$$

$$L(x, y, z) = f(x, y, z) + \lambda g(x, y, z)$$

$$L_x = yz + 2\lambda x = 0, \ L_y = xz + 2\lambda y = 0, \ L_z = xy + 2\lambda z = 0, \ L_\lambda = g(x, y, z) = 0$$

$$xyz = -2\lambda x^2 = -2\lambda y^2 = -2\lambda z^2,$$

$$x = y = z, \ 3x^2 = p^2,$$

$$x = y = z = 1$$

Zadanie 5. Obliczyć pole części powierzchni $z = x^2 + y^2$ zawartej między płaszczyznami $z = 1$ i $z = 9$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy, \ D : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 9;$$

$$z_x = 2x, \ z_y = 2y,$$

$$x = r \cos \phi, \ y = r \sin \phi, \ 1 \leq r^2 \leq 9, \ 0 \leq \phi \leq 2\pi, \ J(r, \phi) = r$$

$$|S| = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^3 \sqrt{1 + 4r^2} r dr = 2\pi \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_1^3 = \dots$$

Zadanie 1. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\sqrt[3]{(6.01)^3 - (2.98)^3 - (4.03)^3}$.

Odp. 1.

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \sqrt[3]{x^3 - y^3 - z^3}, \\ f_x &= x^2 \cdot (x^3 - y^3 - z^3)^{-\frac{2}{3}} \\ x_0 &= 6.0, \quad y_0 = 3, \quad z_0 = 4.0, \quad \Delta x = 0.01, \quad \Delta y = -.02, \quad \Delta z = .03 \\ f(x_0, y_0, z_0) &+ f_x \cdot \Delta x + f_y \cdot \Delta y, \quad f_z \cdot \Delta z \end{aligned}$$

Zadanie 2. Określić położenia środka masy jednorodnego obszaru ograniczonego powierzchniami $z = 0$, $z = 4$, $x^2 + y^2 = 9$, $x = 0$, ($x \geq 0$). Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne walcowe.

Odp. 2. Obszar: połówka walca: $R = 3$, $H = 4$.

$$m = \frac{1}{2}\pi R^2 H \rho_0 = \frac{1}{2}\pi R^2 \cdot 4 \cdot \rho_0 = 2\pi R^2 \cdot \rho_0, \quad \rho(x, y, z) \equiv \rho_0$$

$$x_s = \frac{\iiint_D x \rho(x, y, z) dx dy dz}{m}, \quad y_s = \frac{\iiint_D y \rho(x, y, z) dx dy dz}{m},$$

$$z_s = \frac{\iiint_D z \rho(x, y, z) dx dy dz}{m}$$

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z, \quad 0 \leq r \leq R, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq z \leq 4,$$

$$J(r, \phi, z) = r$$

$$\iiint_D x \rho(x, y) dx dy = \rho_0 \int_0^4 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \phi d\phi \int_0^R r^2 dr = 4 \cdot 2\rho_0 \cdot \frac{1}{3}R^3 = \frac{8}{3}\rho_0 \cdot R^3$$

$$\iiint_D y \rho(x, y) dx dy dz = \rho_0 \int_0^4 dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi d\phi \int_0^R r^2 dr = 0$$

$$\iiint_D z \rho(x, y) dx dy = \rho_0 \int_0^4 z dz \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 d\phi \int_0^R r dr = 4\pi \rho_0 R^2.$$

$$x_s = \frac{4}{3\pi}R, \quad y_s = 0, \quad z_s = 2$$

Zadanie 3. Obliczyć całkę niewłaściwą $\int_0^\infty \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}$.

Odp. 3.

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{e^{2x} + 1}, \quad z = e^x, \quad dz = e^x dx \quad 0 \rightarrow 1, \quad \infty \rightarrow \infty$$

$$\int_1^{\infty} \frac{dz}{z^2 + 1} = \operatorname{arctg} z \Big|_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Zadanie 4. Obliczyć pochodną kierunkową funkcji $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ w punkcie $(x_0, y_0) = (\sqrt[3]{7}, 1)$ w kierunku wektora $\vec{v} = (\frac{12}{13}, -\frac{5}{13})$.

Odp. 4.

$$f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}, \quad f_x = \frac{1}{3} \cdot 3x^2(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}}, \quad f_y = \frac{1}{3} \cdot 3y^2(x^3 + y^3)^{-\frac{2}{3}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = f_x \cdot v_1 + f_y \cdot v_2$$

$$x^3 + y^3 = 8, \quad f_x = \sqrt[3]{7^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{12}{13} - 1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{5}{13}$$

Zadanie 5. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji $f(x, y) = (y^2 - 2x)e^{-x}$.

$$f_x = (-2 - y^2 + 2x)e^{-x} = 0, \quad f_y = 2ye^{-x} = 0;$$

$$x = 1, \quad y = 0$$

$$H = \begin{bmatrix} (2 + y^2 - 2x + 2)e^{-x} & -2ye^{-x} \\ -2ye^{-x} & 2e^{-x} \end{bmatrix} = e^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Hesjan dodatnio określony: w punkcie $(x = 1, y = 0)$ jest min lokalne.

Egzamin 1 - analiza matematyczna F2. Grupa D

Zadanie 1. Średnica walca zmierzona z dokładnością 1 cm wynosi $D = 1$ m, a wysokość zmierzona z dokładnością 2 cm wynosi $H = 2$ m. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość tego walca?

Odp. 1.

$$V = \pi R^2 H = \frac{1}{4} D^2 H, \quad V_D = \frac{1}{2} \pi D H, \quad V_H = \frac{1}{4} \pi D^2, \quad R = \frac{D}{2}$$

$$\delta V = V_D \Delta D + V_H \Delta H$$

$$|\delta V| = 0.5 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2 \cdot 0.01 + 0.25 \cdot \pi \cdot 1^2 \cdot 0.02 = \dots,$$

Zadanie 2. Obliczyć objętość obszaru U ograniczonego powierzchniami $z = 3$, $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$. Sporządzić rysunek tego obszaru. Zastosować współrzędne biegunowe.

Odp. 2. $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$, to sfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, powierzchnia w zadaniu, to część sfery nad $D : 0 \leq x^2 + y^2 \leq 25 - 3^2 = 4^2$, $3 \leq z \leq 5$.

$$V = \iint_D \left[\sqrt{25 - x^2 - y^2} - 3 \right] dx dy = V_1 - V_2$$

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad 0 \leq r \leq 4, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi, \quad J(r, \phi) = r$$

$$V_1 = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^4 \sqrt{25 - r^2} r dr = -\frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot (25 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = -\frac{1}{3} \cdot 2\pi \left((25 - 4^2)^{\frac{3}{2}} - 25^{\frac{3}{2}} \right) =$$

$$-\frac{1}{3} \cdot 2\pi (27 - 125) = \frac{2 \cdot 98}{3} \pi$$

$$V_2 = \iint_D 3 dx dy = 3 \cdot 4^2 \pi = 48\pi$$

$$V = V_1 - V_2 = \frac{2 \cdot 98 - 3 \cdot 48}{3} \pi = \frac{2 \cdot 26}{3} \pi$$

Zadanie 3. Napisać równanie płaszczyzny stycznej w punkcie $(1, \sqrt{3}, z_0)$ do wykresu funkcji $z = \operatorname{arctg} \frac{x}{y}$.

Odp. 3. $z_0 = \operatorname{arctg} \frac{x_0}{y_0} = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

wektor normalny

$$\vec{n} = (z_x, z_y, -1) = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2}, -1 \right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{4}, -\frac{1}{4}, -1 \right)$$

równanie płaszczyzny stycznej

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(x - x_0) - \frac{1}{4}(y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(x - 1) - \frac{1}{4}(y - \sqrt{3}) - 1 \cdot (z - \frac{\pi}{6}) = 0$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4}x - \frac{1}{4}y + \frac{\pi}{6} = z$$

Zadanie 4. W całce iterowanej

$$\int_0^1 dx \int_{x^2+1}^2 f(x, y) dy$$

zmienić kolejność całkowania. Sporządzić rysunek obszaru całkowania.

Odp. 4.

$$\int_0^1 dx \int_{x^2+1}^2 f(x,y) dy = \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{y-1}} f(x,y) dx.$$

Zadanie 5. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji $f(x,y) = xy \ln(x^2 + y^2)$ położone we wnętrzu pierwszej ćwiartki układu współrzędnych.

Odp. 5.

$$f_x = y \ln(x^2 + y^2) + xy \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = 0, \quad f_y = x \ln(x^2 + y^2) + xy \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0$$

$$\begin{cases} y \ln(x^2 + y^2) + xy \cdot \frac{2x}{x^2 + y^2} = 0 \setminus \cdot y, \cdot x \\ x \ln(x^2 + y^2) + xy \cdot \frac{2y}{x^2 + y^2} = 0 \setminus \cdot x, \cdot y \end{cases}$$

$$\begin{cases} (y^2 - x^2) \ln(x^2 + y^2) = 0 \\ 2xy \frac{y^2 - x^2}{x^2 + y^2} = 0 \end{cases}$$

$$x = y \text{ lub } x = -y,$$

$$x = y \quad (x, y \geq 0)$$

$$x \ln(2x^2) + x^2 \cdot \frac{2x}{2x^2} = 0$$

$$x(\ln(2x^2) + 1) = 0$$

$$x = 0, \quad x = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$x = y = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}, \quad x^2 + y^2 = e^{-1}, \quad xy = x^2 = y^2 = \frac{1}{2} e^{-1},$$

Hesjan:

$$f_{xx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{4xy}{x^2 + y^2} - \frac{4x^3y}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + 2 - 1 = 2$$

$$f_{xy} = \ln(x^2 + y^2) + \frac{2y^2}{x^2 + y^2} + \frac{2x^2}{x^2 + y^2} - \frac{4x^2y^2}{(x^2 + y^2)^2} = -1 + 1 + 1 - 1 = 0$$

$$f_{yy} = \frac{2xy}{x^2 + y^2} + \frac{4xy}{x^2 + y^2} - \frac{4y^3x}{(x^2 + y^2)^2} = 1 + 2 - 1 = 2$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

hesjan dodatnio określony, w punkcie jest minimum lokalne.

Zadanie 1. Zmienić kolejność całkowania w całce

$$\int_{-1}^1 dx \int_{x-1}^{1-\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy.$$

Naszkieować obszar całkowania.

Zadanie 2. Obliczyć masę półkuli wydrążonej o promieniu wewnętrznym r i promieniu zewnętrznym R , jeżeli gęstość masy w punkcie jest równa odległości tego punktu od środka kuli. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne sferyczne.

Zadanie 3. Liczbę 12 przedstawić w postaci sumy trzech dodatnich składników x, y, z tak, aby iloczyn xyz był największy. Jaka będzie odpowiedź, gdy składniki mogą mieć dowolny znak?

Zadanie 4. Obliczyć moment bezwładności względem osi Oz jednorodnego (gęstość $\gamma = 1$) obszaru ograniczonego powierzchniami $z = x^2 + y^2$, $z = 4$. Sporządzić rysunek. Zastosować współrzędne biegunowe.

Zadanie 5. Znaleźć ekstrema lokalne funkcji uwikłanej $y = y(x)$ określonej równaniem $x^3 + y^3 - 27xy = 0$.

Zadanie 6. Korzystając z różniczki funkcji obliczyć przybliżoną wartość wyrażenia $\frac{(1.02)^4}{\sqrt[3]{7.99}}$.