

# Analiza Matematyczna F2. Lista zadań 2

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania, GiS 2016)

## 1 Funkcje dwóch i trzech zmiennych

**Zadanie 1.** Spośród podanych zbiorów na płaszczyźnie lub w przestrzeni wskazać te, które są ograniczone, otwarte, domknięte. Które z tych zbiorów są obszarami:

- a)  $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2\}$ ;
- b)  $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$ ;
- c)  $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$ ;

**Zadanie 2.** Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji::

- a)  $f(x, y) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2 + y^2 - 25}}$ ,      b)  $g(x, y) = \ln \frac{x^2 + y^2 - 4}{9 - x^2 - y^2}$ ,
- c)  $h(x, y, z) = \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{x-2}$ ,      d)  $k(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$ .

**Zadanie 3.** Znaleźć poziomice wykresów podanych funkcji i na tej podstawie naszkicować te wykresy:

- a)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,      b)  $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ ,
- c)  $h(x, y) = \sin y$ ,      d)  $p(x, y) = e^{x-y}$ .

**Zadanie 4.** Opisać, za pomocą jakich przekształceń, z wykresu funkcji  $z = f(x, y)$  można otrzymać wykresy funkcji:

- a)  $z = f(x, y) - 5$ ;      b)  $z = f(x + 3, y - 2)$ ;      c)  $z = -f(x, y)$ ;
- d)  $z = f(2x, 3y)$ ;      e)  $z = f(-x, y)$ ;      f)  $z = |f(x, y)|$ ;
- g)  $z = 4f(x, y)$ ;      h)  $z = f(x, |y|)$ ;      i)  $z = f(|x|, |y|)$ .

**Zadanie 5.** Naskicować wykresy funkcji dwóch zmiennych:

$$\begin{aligned} a) z &= 6 - 3x + 2y; & b) z &= 3(x^2 + y^2); & c) z &= 4 - x^2 - y^2; \\ d) z &= \sqrt{y - x^2}; & e) z &= \sqrt{5 - x^2 - y^2}; & f) z &= 1 - \sqrt{2x - x^2 + 4y - y^2}; \\ g) z &= -\sqrt{4 - y^2}; & h) z &= \sqrt{x^2 - y^2}; & i) z &= 1 - \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2}. \end{aligned}$$

**Zadanie 6.** Zbadać, które z funkcji są ograniczone, ograniczone z dołu, ograniczone z góry w swoich dziedzinach naturalnych:

$$\begin{aligned} a) f(x, y) &= \sin x + \cos y; & b) f(x, y) &= \sqrt{x^2 + y^2}; & c) f(x, y, z) &= x^2 + y^4; \\ d) f(x, y, z) &= x^2 + y^2 - z; & e) f(x, y, z) &= \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + 4}; & f) f(x, y) &= \frac{xy}{x^2 + y^2}; \end{aligned}$$

**Zadanie 7.** Zbadać, czy podane ciągi punktów na płaszczyźnie lub w przestrzeni są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice):

$$a) (x_n, y_n) = ((-1)^n, \sin \frac{\pi}{n}), \quad b) (x_n, y_n, z_n) = \left( \frac{n^2}{n^2+1}, \sqrt[n]{2}, 3 \right).$$

**Zadanie 8.** Obliczyć (jeżeli istnieją) podane granice funkcji:

$$\begin{aligned} a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{xy}, & \quad b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}, & \quad d) \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,0)} \frac{\sin^2 x}{y^2}, \\ e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2), & \quad f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \\ g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y}, & \quad h) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^3}, \end{aligned}$$

**Zadanie 9.** Znaleźć zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

$$\begin{aligned} a) f(x, y, z) &= \begin{cases} \sqrt{1 - x^2 - y^2} & \text{dla } x^2 + y^2 \leq 1 \\ 0 & \text{dla } x^2 + y^2 > 1, \end{cases} \\ b) f(x, y) &= \begin{cases} \sin x & \text{dla } y \geq 0 \text{ oraz } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{dla } y < 0 \text{ oraz } x \in \mathbb{R}, \end{cases} \\ c) f(x, y) &= \begin{cases} e^x & \text{dla } x < y, \\ e^y & \text{dla } x \geq y. \end{cases} \end{aligned}$$

**Zadanie 10.** Wyznaczyć i narysować dziedzinę naturalną funkcji

$$f(x, y) = \ln \frac{x^2 + y^2 + 2y}{x + y}$$

oraz jej poziomice dla poziomemu  $h = 0$ .

**Zadanie 11.** Obliczyć granicę  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{a - \sqrt{a^2 - xy}}{xy}$ , gdzie  $a > 0$ .

**Zadanie 12.** Zbadac, czy istnieje granica  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^4+y^4)}{x^2+y^2}$ .

**Zadanie 13.** Zbadac, czy istnieje granica  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ .

**Zadanie 14.** Zbadac, czy funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\operatorname{tg}(xy)}{x} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła w punkcie  $(0, 0)$ .

**Zadanie 15.** Dla jakich wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ , funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{ax^2+3y^2}{x^2+2y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie? Odpowiedź uzasadnij.

**Zadanie 16.** Dla jakich wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ , funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie.

**Zadanie 17.** Dla jakich wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ , funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+4}-2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ a & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie.

**Zadanie 18.** Dla jakich wartości parametru  $a \in \mathbb{R}$ , funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin(ax^2+y^2)}{2x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie.

**Zadanie 19.** Pokazać, że funkcja  $f$  określona wzorem

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

jest ciągła na płaszczyźnie.