

Analiza Matematyczna F2. Lista zadań 3

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania, GiS 2008)

3 Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych

Zadanie 1. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } xy = 0, \\ 1 & \text{dla } x \neq 0, \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0), \\ b) \quad f(x, y, z) &= \sqrt[3]{xy(x-1)}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 1), \\ c) \quad f(x, y) &= \begin{cases} x & \text{dla } y = 0, \\ y^2 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{w pozostałych punktach,} \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0). \end{aligned}$$

Zadanie 2. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x, y) &= \arctg \frac{1-xy}{x+y}, \quad b) \quad f(x, y, z) = \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \\ c) \quad f(x, y) &= e^{\sin \frac{y}{x}}, \quad d) \quad f(x, y, z) = \sin(x \cos(y \sin x)). \end{aligned}$$

Zadanie 3. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji i sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x, y) &= \sin(x^2 + y^2), \quad b) \quad f(x, y) = xe^{xy}, \\ c) \quad f(x, y, z) &= \ln(x^2 + y^4 + z^6 + 1), \quad d) \quad f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}. \end{aligned}$$

Zadanie 4. Zbadać, czy równość $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ jest prawdziwa dla funkcji:

$$a) \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad b) \quad f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}.$$

Zadanie 5. Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe podanych funkcji:

$$a) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad f(x, y) = \sin xy, \quad b) \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x \partial y}, \quad f(x, y) = \frac{x+y}{x-y},$$

$$c) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \quad f(x, y, z) = \frac{x^2 y^3}{z}, \quad d) \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}, \quad f(x, y, z) = e^{xy+z},$$

Zadanie 6. Funkcja $f(x, y)$ jest różniczkowalna w punkcie (x_0, y_0) , jeśli

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - (f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

inaczej

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$a) f(x, y) = \sqrt[3]{xy}, \quad (x_0, y_0) = (0, 0),$$

$$b) f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$$

$$c) f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0).$$

Zadanie 7. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

$$a) z = \frac{\arcsin x}{\arcsin y}, \quad (x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right),$$

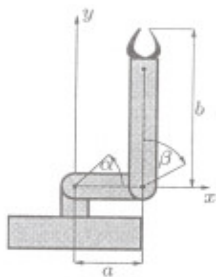
$$b) z = x^y, \quad (x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 16),$$

Zadanie 8. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

$$a) (1.02)^3 \cdot (0.997)^2, \quad b) \sqrt[3]{(2.93)^3 + (4.05)^3 + (4.99)^3},$$

Zadanie 9.

- Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością $\pm 1\text{mm}$. Otrzymano $h = 350\text{ mm}$ oraz $r = 145\text{ mm}$. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego stożka?
- Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3\text{m}$, $b = 4\text{m}$, $c = 12\text{m}$. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d , jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2cm .
- Robot do zgrzewania karoserii samochodowych składa się z dwóch przegubowych ramion o długości $a = 1\text{m}$, $b = 2\text{m}$ (rysunek).



Położenie zgrzewarki jest określone przez kąty $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$. Obliczyć w przybliżeniu dokładność jej położenia, jeżeli kąty odchylenia ramion ustawione są z dokładnością $\Delta_\alpha = \Delta_\beta = 0,003\text{rd}$.

Zadanie 10. Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem x i y podanych funkcji:

- a) $z = f(u, v) = \ln \frac{u}{v+1}$, $u = x \sin y$, $v = x \cos y$,
b) $z = f(u, v, w) = \arcsin \frac{u}{v+w}$, gdzie $u = e^{\frac{x}{y}}$, $v = x^2 + y^2$, $w = 2xy$.

Zadanie 11. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

- a) $f(x, y) = 2|x| + |y|$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
b) $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$,

Zadanie 12. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (-3, 4)$, $\vec{v} = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$
 $f(x, y, z) = e^{xyz}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.

Zadanie 13. Napisać wzór Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów, jeżeli

- a) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $n = 2$,
b) $f(x, y) = (x + y)^3$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, $n = 4$.

Zadanie 14. Zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne

- a) $f(x, y) = 2|x| + 3|y|$, b) $f(x, y) = 2x^4 - 3y^7$.

Zadanie 15. Znaleźć ekstrema podanych funkcji:

- a) $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$, b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,
c) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$, d) $f(x, y) = e^{-(x^2 + y^2 + 2x)}$,
e) $f(x, y) = xy^2(12 - x - y)$, f) $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

Zadanie 16. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

- a) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad |x| + |y| \leq 2,$
- b) $f(x, y) = xy^2 + 4xy - 4x, \quad -3 \leq x \leq 3, \quad -3 \leq y \leq 0,$
- c) $f(x, y) = x^4 + y^4, \quad x^2 + y^2 \leq 9,$
- d) $f(x, y) = \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^2+y^2+2}, \quad \mathbb{R}.$

Zadanie 17.

- a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5), B = (1, 4), C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.
- b) Jakie powinny być długość a , szerokość b i wysokość h prostopadłościenniej otwartej wanny o pojemności V , aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?
- c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k : \begin{cases} x + y - 1 &= 0, \\ z + 1 &= 0, \end{cases} \quad l : \begin{cases} x - y + 3 &= 0, \\ z - 2 &= 0, \end{cases}$$

- d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\text{m}^3$. Do budowy magazynu używane są płyty w cenie 30zł/m^2 , do budowy podłogi w cenie 40zł/m^2 , a sufitu w cenie 20zł/m^2 . Znaleźć długość a , szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.
- e) Wśród trójkątów wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole.
- f) Na trzech parami skośnych krawędziach sześcianu (rysunek) wyznaczyć po jednym punkcie w ten sposób, aby pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach było najmniejsze.

Zadanie 18. Zbadać, czy podane równania określają jednoznacznie ciągłe funkcje uwikłane $y = y(x)$ na pewnych otoczeniach zadanych punktów:

- a) $x^y - y^x = 0, \quad i) \quad A = (2, 4), \quad ii) \quad B = (e, e), \quad iii) \quad C = (3, 3),$
- b) $x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 0, \quad i) \quad A = (0, 0), \quad ii) \quad B = (1, 1), \quad iii) \quad C = (-1, 1).$

Zadanie 19. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:

- a) $x^3 + x - y^3 = 0, \quad (2, 2), \quad b) \quad x^2 + y^2 - 3xy + x = 0, \quad (1, 1).$

Zadanie 20. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

- a) $xe^y - y + 1 = 0, \quad b) \quad x^2 + y^2 - 3xy = 0, \quad c) \quad x - y = \sin x - \sin y.$

Zadanie 21. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych postaci $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

- a) $x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0, \quad b) \quad (x - y)^2 = y + xy - 3x.$