

Analiza Matematyczna F2, lista zadań 4

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczyła, Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania, GiS 2008)

4 Całki podwójne

Zadanie 1. Obliczyć całki podwójne po wskazanych prostokątach:

- a) $\iint_R \frac{dxdy}{(x+y+1)^3}$, gdzie $R = [0, 2] \times [0, 1]$,
- b) $\iint_R x \sin(xy) dxdy$, gdzie $R = [0, 1] \times [\pi, 2\pi]$,
- c) $\iint_R e^{2x-y} dxdy$, gdzie $R = [0, 1] \times [-1, 0]$,

Zadanie 2. Podane całki podwójne zamienić na iloczyny lub sumy iloczynów całek pojedynczych:

- a) $\iint_R e^{x-y} dxdy$, gdzie $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$,
- b) $\iint_R xy \ln \frac{x}{y} dxdy$, gdzie $R = [1, e] \times [1, 2]$,
- c) $\iint_R \frac{\sqrt{xy^2+4x^4}}{xy} dxdy$, gdzie $R = [1, 9] \times [2, 3]$,

Zadanie 3. Całkę podwójną $\iint_D f(x, y) dxdy$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar D jest ograniczony krzywymi o równaniach:

- a) $x^2 + y = 2$, $y^3 = x^2$,
- b) $x^2 + y^2 = 4$, $y = 2x - x^2$, $x = 0$ ($x, y \geq 0$),
- c) $x^2 - 4x + y^2 + 6y - 51 = 0$,
- d) $x^2 - y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 3$ ($x < 0$).

Zadanie 4. W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania:

- a) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{|x|} f(x, y) dy$, b) $\int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$,
- c) $\int_0^4 dx \int_{\sqrt{4x-x^2}}^{2\sqrt{x}} f(x, y) dy$, d) $\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_{y^2-1}^{\frac{x^2}{2}} f(x, y) dy$.

Zadanie 5. Obliczyć podane całki iterowane:

$$\begin{aligned} a) \int_0^1 dx \int_{x^3}^{x^2} \frac{y}{x^2} dy, & \quad b) \int_1^4 dx \int_x^{2x} x^2 \sqrt{y-x} dy, \\ c) \int_{-2}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} (x^3 + y^3) dy, & \quad d) \int_0^\pi dx \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} dy, \end{aligned}$$

Narysować obszary całkowania.

Zadanie 6. Obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

$$\begin{aligned} a) \iint_D \min(x, y) dx dy, & \text{ gdzie } D = [0, 1] \times [0, 2] \\ b) \iint_D E(x+y) dx dy, & \text{ gdzie } D = [0, 2] \times [0, 2], \\ c) \iint_D |x-y| dx dy, & \text{ gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, 0 \leq y \leq 3-2x\}, \\ d) \iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2) dx dy, & \text{ gdzie } D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4\}. \end{aligned}$$

Uwaga. $E(u)$ oznacza część całkowitą liczby u .

Zadanie 7. Obliczyć wartości średnie podanych funkcji na wskazanych obszarach:

$$\begin{aligned} a) f(y) = \sin x \cos y, & \text{ gdzie } D = [0, \pi] \times [0, \frac{\pi}{2}], \\ b) f(y) = x + y, & \text{ gdzie } D : 0 \leq y \leq \pi, 0 \leq x \leq \sin y. \end{aligned}$$

Zadanie 8. Wprowadzając współrzędne biegunowe obliczyć podane całki podwójne po wskazanych obszarach:

$$\begin{aligned} a) \iint_D xy dx dy, & \text{ gdzie } D : x \geq 0, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2, \\ b) \iint_D y^2 e^{x^2+y^2} dx dy, & \text{ gdzie } D : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1, \\ c) \iint_D (x^2 + y^2) dx dy, & \text{ gdzie } D : y \geq 0, y \leq x^2 + y^2 \leq x, \\ d) \iint_D x \sqrt{x^2 + y^2} dx dy, & \text{ gdzie } D : x \geq 0, (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2). \end{aligned}$$

Zadanie 9. Obliczyć pola obszarów ograniczonych podanymi krzywymi:

$$\begin{aligned} a) y^2 = 4x, \quad x + y = 3, \quad y = 0 \quad (y \geq 0), \\ b) x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad x^2 + y^2 - 4y = 0, \\ c) x + y = 4, \quad x + y = 8, \quad x - 3y = 0, \quad x - 3y = 5, \\ d) x^2 + y^2 = 2y, \quad y = \sqrt{3}|x|. \end{aligned}$$

Zadanie 10. Obliczyć objętość brył ograniczonych podanymi powierzchniami:

$$\begin{aligned} a) x^2 + y^2 - 2y = 0, \quad z = x^2 + y^2, \quad z = 0, & \quad b) x^2 + y^2 + z^2 - 2z = 0, \\ c) (x-1)^2 + (y-1)^2 = 1, \quad z = xy, \quad z = 0, & \quad d) 2z = x^2 + y^2, \quad y + z = 4. \end{aligned}$$

Zadanie 11. Obliczyć pola podanych płatów:

- a) $z = x^2 + y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 1,$
- b) $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 - Rx \leq 0, \quad z \geq 0,$
- c) $z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad 1 \leq z \leq 2,$

Zadanie 12. Satelita telekomunikacyjny jest umieszczony na orbicie geostacjonarnej położonej w odległości $h = 400$ km od powierzchni Ziemi. Obliczyć pole obszaru objętego zasięgiem tego satelity, Przyjąć, że promień Ziemi jest równy $R = 6400$ km.

Zadanie 13. Obliczyć masy podanych obszarów o wskazanych gęstościach powierzchniowych:

- a) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \sin x\},$ gdzie $\sigma(x, y) = x,$
- b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \quad y \geq 0\},$ gdzie $\sigma(x, y) = |x|.$

Zadanie 14. Znaleźć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

- a) D – trójkąt równoramienny o podstawie a i wysokości $h,$
- b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \sin^2 x\},$
- c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 \leq y \leq 1\},$
- d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq e^x\}.$

Zadanie 15. Obliczyć momenty bezwładności podanych obszarów względem wskazanych osi:

- a) D -kwadrat jednorodny o boku $a,$ moment obliczyć względem przekątnej przyjąć $\sigma(x, y) = 1.$
- b) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq R^2, \quad y \geq 0\},$ moment obliczyć względem osi $OX,$ przyjąć $\sigma(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$
- c) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq 1 - x^2\},$ moment obliczyć względem osi symetrii obszaru, przyjąć $\sigma(x, y) = x^2.$
- d) $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, \quad 0 \leq y \leq \sin x\},$ moment obliczyć względem osi $OX,$ przyjąć $\sigma(x, y) = x.$

Zadanie 16. Obliczyć parcie wody na płytę zasuwę turbiny elektrowni wodnej. Zasuwa jest ustawiona pionowo i ma kształt kwadratu o boku $a = 1$ m. Górna krawędź tej zasuwę jest pozioma i znajduje się $H = 5$ m pod poziomem wody.

Zadanie 17. Obliczyć siłę z jaką masa punktowa $m = 100$ kg jest przyciągana przez jednorodny koło o masie $M = 100000$ kg i promieniu $R = 4$ m. Masa punktowa jest położona na wysokości $H = 3$ m nad środkiem koła.