

Analiza Matematyczna F2. Lista zadań 5

(Na podstawie podręcznika M. Gewert, Z. Skoczylas, Analiza Matematyczna 2. Przykłady i zadania, GiS 2008)

5 Całki potrójne

Zadanie 1. Obliczyć całki potrójne po wskazanych prostopadłościanach:

- a) $\iiint_U \frac{xdxdydz}{yz}$, gdzie $U = [1, 2] \times [1, e] \times [1, e]$,
- b) $\iiint_U (x + y + z)dxdydz$, gdzie $U = [1, 2] \times [2, 3] \times [3, 4]$,
- c) $\iiint_U \sin x \sin(x + y) \sin(x + y + z)dxdydz$, gdzie $U = [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, \pi]$.

Zadanie 2. Podane całki potrójne zamienić na sumy iloczynów całek pojedynczych:

- a) $\iiint_U \sin(x + y + z) dxdydz$, gdzie $U = [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \pi]$,
- b) $\iiint_U z \ln(x^y y^x) dxdydz$, gdzie $U = [1, e] \times [1, e] \times [0, 1]$.

Zadanie 3. Całkę potrójną $\iiint_U f(x, y, z)dxdydz$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U jest ograniczony powierzchniami o równaniach:

- a) $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$, $z = 6$,
- b) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $z = 4$, ($z \geq 4$),
- c) $z = x^2 + y^2$, $z \sqrt{20 - x^2 - y^2}$.

Zadanie 4. W podanych całkach iterowanych zmienić kolejność całkowania (rozważyć wszystkie przypadki):

- a) $\int_0^1 dx \int_0^{2-2x} dy \int_0^{3-3x-\frac{3}{2}y} f(x, y, z)dz$,
- b) $\int_{-2}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 dy \int_{-\sqrt{4-x^2-y^2}}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} f(x, y, z)dz$,
- c) $\int_0^3 dx \int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dy \int_{-\sqrt{z-x^2}}^{\sqrt{z-x^2}} f(x, y, z)dy$.

Zadanie 5. Obliczyć całki potrójne z danych funkcji po wskazanych obszarach:

- a) $f(x, y, z) = e^{x+y+z}$, gdzie $U : x \leq 0, -x \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq -x$,
- b) $f(x, y, z) = \frac{1}{(3x+2y+z+1)^4}$, gdzie $U : x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq z \leq 1 - x - y$,
- c) $f(x, y, z) = x^2 + y^2$, gdzie $U : x^2 + y^2 \leq 4, 1 - x \leq z \leq 2 - x$.

Zadanie 6. Wprowadzając współrzędne walcowe obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

- a) $\iiint_U (x^2 + y^2 + z^2)^2 dx dy dz$, gdzie $U : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1$,
- b) $\iiint_U xyz dx dy dz$, gdzie $U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,
- c) $\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2Rz$.

Zadanie 7. Wprowadzając współrzędne sferyczne obliczyć podane całki po wskazanych obszarach:

- a) $\iiint_U \frac{dx dy dz}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, gdzie $U : 4 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$,
- b) $\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie $U : \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{1 - x^2 - y^2}$,
- c) $\iiint_U z^2 dx dy dz$, gdzie $U : x^2 + y^2 + (z - R)^2 \leq R^2 \ (R > 0)$,
- d) $\iiint_U x^2 dx dy dz$, gdzie $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x$.

Zadanie 8. Obliczyć objętości obszarów U ograniczonych podanymi powierzchniami:

- a) $x^2 + y^2 = 9, x + y + z = 1, x + y + z = 5$,
- b) $x = -1, x = 2, z = 4 - y^2, z = 2 + y^2$,
- c) $z = \frac{1}{1+x^2+y^2}, z = 0, x^2 + y^2 = 1$.

Zadanie 9. Obliczyć masy podanych obszarów o zadanych gęstościach objętościowych:

- a) $U = [0, a] \times [0, b] \times [0, c]$, gdzie $\gamma(x, y, z) = x + y + z$ oraz $a, b, c > 0$,
- b) $U : x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$, gdzie $\gamma(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

Zadanie 10. Wyznaczyć położenia środków masy podanych obszarów jednorodnych:

- a) $U : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 - x, 0 \leq z \leq 1 - x$,
- b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H ,
- c) $U : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$.

Zadanie 11. Obliczyć momenty bezwładności względem wskazanych osi podanych obszarów jednorodnych o masie M :

- a) walec o promieniu podstawy R i wysokości H , względem osi walca,

- b) stożek o promieniu podstawy R i wysokości H , względem osi stożka,
- c) walec o promieniu podstawy R i wysokości H , względem średnicy podstawy,
- d) część kuli $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ położona w pierwszym oktancie, względem osi symetrii tej części.

Zadanie 12. Obliczyć siłę z jaką jednorodna kula o promieniu R i masie M przyciąga punkt materialny o masie m położony w odległości d od środka kuli $d > R$.

Zadanie 13. Obliczyć natężenie pola elektrycznego, jakie wytwarza jednorodnie naładowany stożek o promieniu podstawy R , wysokości H i ładunku całkowitym Q , w swoim wierzchołku.

Zadanie 14. Podstawą jednorodnego ostrosłupa jest prostokąt o wymiarach $a = 40$ cm, $b = 30$ cm. Jedna z krawędzi ostrosłupa jest prostopadła do płaszczyzny podstawy i ma długość $h = 20$ cm. Obliczyć, jak daleko może wystawać ten ostrosłup poza krawędź stołu, aby nie spadł na podłogę.