

Zadanie 1. Obszary ograniczone podanymi powierzchniami zapisać jako obszary normalne względem wskazanej płaszczyzny

- (a) $x + y + z = 4$, $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$, xOy ; (b) $y^2 + z^2 = 4x$, $x = 2$, yOz ;
 (c) $x + y = 1$, $y = 1 - z^2$, $y = 0$, $x = 1$, zOx ; (d) $y = x^2$, $x = y^2$, $z = xy$, $z = 0$, xOy .

Zadanie 2. Podane obszary zapisać jako obszary normalne względem płaszczyzn układu współrzędnych (rozważyć wszystkie przypadki).

- (a) kula U : $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$; (b) stożek U : $\sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq H$;
 (c) walec U : $x^2 + y^2 \leq R^2$, $0 \leq z \leq H$; (d) paraboloida U : $x^2 + y^2 \leq z \leq H$.

Zadanie 3. Obliczyć całki iterowane (narysować obszary całkowania):

- (a) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} (x + y + z)^3 dz$; (b) $\int_0^\pi dx \int_0^x dy \int_0^{x+y} \cos(y + z) dz$;
 (c) $\int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^{\sqrt{x^2+y^2}} z dz$; (d) $\int_{-1}^0 dx \int_x^0 dy \int_0^{\sqrt{x^2-y^2}} \sqrt{x^2 - y^2} dz$;
 (e) $\int_0^1 dx \int_{-x}^0 dy \int_0^{x+y} e^z dz$; (f) $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x dy \int_{y^2}^y xy dz$.

Zadanie 4. Całka potrójna $\iiint_U f(x, y, z) dx dy dz$ zamienić na całki iterowane, jeżeli obszar U ograniczony jest powierzchniami:

- (a) $2x + 3y + 4z = 12$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; (b) $y = \sqrt{x^2 + z^2}$, $y = 1$;
 (c) $y = x^2 + z^2$, $y = 8 - x^2 - z^2$; (d) $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Zadanie 5. Obliczyć całki potrójne po podanych obszarach:

- (a) $\iiint_U xy dx dy dz$, gdzie U : $y = 0$, $y = x$, $x = \sqrt{9 - z^2}$;
 (b) $\iiint_U y dx dy dz$, gdzie U : $z = y$, $z = 0$, $y = 1 - x^2$;
 (c) $\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie U : $z = y^2 - x^2$, $x = 0$, $y = 1$, $y = x$, $z = 0$;
 (d) $\iiint_U \cos\left(\frac{x}{y}\right) dx dy dz$, gdzie U : $y = \frac{\pi}{6}$, $y = x$, $x = \frac{\pi}{2}$, $z = xy$, $z = 0$;
 (e) $\iiint_U x^2 y z dx dy dz$, gdzie U : $x = 2$, $y = -x$, $y = x^2$, $z = 0$, $z = x + y$.

Zadanie 6. Zmienić kolejność całkowania w całkach iterowanych (narysować obszar całkowania):

$$\begin{aligned}
& \text{(a)} \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_2^3 f(x, y, z) dz; & \text{(b)} \int_0^2 dx \int_x^2 dy \int_0^y f(x, y, z) dz; \\
& \text{(c)} \int_{-1}^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x, y, z) dz; & \text{(d)} \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} dy \int_{-1}^1 f(x, y, z) dz.
\end{aligned}$$

Zadanie 7. Dokonując odpowiedniej zamiany zmiennych obliczyć całki potrójne:

(a) $\iiint_U x dx dy dz$, gdzie U jest równoległościanem ograniczonym płaszczyznami: $x = 0$, $x = 1$, $x + y = 1$, $x + y = 2$, $x + y + z = 2$, $x + y + z = 3$;

(b) $\iiint_U (x^2 + 4y^2 + 9z^2) dx dy dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym elipsoidą $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 36$;

(c) $\iiint_U dx dy dz$, gdzie U jest obszarem ograniczonym powierzchnią: $(x - y)^2 + (x + y)^2 = r^2$ oraz płaszczyznami $x + y + z = 0$, $x + y + z = h$;

(d) $\iiint_U (x^2 + y^2) dx dy dz$, gdzie U jest torusem, tj. bryłą powstałą przez obrót koła $(x - R)^2 + z^2 \leq r^2$, $y = 0$, gdzie $0 < r \leq R$, wokół osi Oz .

Zamiana zmiennych ($x = x(\rho, \phi, \psi)$, $y = y(\rho, \phi, \psi)$, $z = z(\rho, \phi, \psi)$):

$$\begin{cases} x = (R + \rho \cos \psi) \cos \phi = R \cos \phi + \rho \cos \psi \cos \phi \\ y = (R + \rho \cos \psi) \sin \phi = R \sin \phi + \rho \cos \psi \sin \phi \\ z = \rho \sin \psi \end{cases}$$

$$0 \leq \rho \leq r, 0 \leq \phi < 2\pi, 0 \leq \psi < 2\pi$$