

Lista 1. Wstęp do równań różniczkowych zwyczajnych.

Zadanie 1. a) Próbka substancji radioaktywnej ulega rozpadowi i po 4 latach jej masa jest równa 20 gram, po dalszych 4 latach jej masa wynosi 4 gramy. Podać masę tej próbki w chwili początkowej.

b) Polon-210 ma okres połowicznego rozpadu (czas T , po którym połowa masy próbki ulegnie rozpadowi) jest równy 140 dni. Znaleźć masę próbki po 100 dniach, jeśli w chwili początkowej jej masa wynosiła 200 g.

c) Pewna substancja ma okres połowicznego rozpadu równy 100 lat. Jaki procent początkowej masy tej substancji pozostanie po i) 10, ii) 50, iii) 200 latach?

Zadanie 2. Pokaż, że następujące funkcje są rozwiązaniami podanych równań różniczkowych na wskazanych przedziałach

$$a) y(t) = \frac{\sin t}{t}, \quad ty' + y = \cos t, \quad (0, \infty); \quad b) y(t) = t^2, \quad ty' + y = 3t^2, \quad \mathbf{R}$$

$$c) y(t) = \frac{1}{1+t^2}, \quad y' + 2ty^2 = 0, \quad \mathbf{R}, \quad d) y(t) = -\sqrt{4-t^2}, \quad yy' = -t, \quad (-2, 2).$$

Zadanie 3. Pokazać, że dla każdego $C \in \mathbf{R}$ następujące funkcje są rozwiązaniami zadanych równań różniczkowych, następnie znajdź rozwiązania spełniające wskazane warunki początkowe

$$a) y(t) = t + C, \quad y' = 1, \quad y(0) = 0; \quad b) y(t) = Ce^t, \quad y' = y, \quad y(1) = -1;$$

$$c) y(t) = Ce^{-2t} + \frac{1}{3}e^t, \quad y' + 2y = et, \quad y(0) = 1, \quad d) y(t) = t + C\sqrt{t^2 + 1}, \quad y' = \frac{ty+1}{t^2+1}, \quad y(0) = 0.$$

Zadanie 4. Znajdź rozwiązania następujących równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych

$$a) yy' + 4t = 0; \quad b) dy = 2ty^2 dt; \quad c) t(y^2 - 1) dt + y(t^2 - 1) dy = 0;$$

$$d) 2\sqrt{ty}' = \sqrt{1-y^2}; \quad e) y' = 1 + t + y + ty; \quad f) y' + 4y = y(e^{-t} + 4).$$

Zadanie 5. Przeprowadź analizę rozwiązań równania różniczkowego $y't = ky$ w zależności od parametru k . Narysuj wykresy rozwiązań.

Zadanie 6. Znaleźć rozwiązania następującego równania różniczkowego $(1+t^2)y' = 1+y^2$ spełniające wskazane warunki początkowe

$$a) y(1) = -1; \quad b) y(1) = 1.$$

Podaj przedziały, na których są określone.

Zadanie 7. Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych o rozdzielonych zmiennych

a) $y' \sin t = y \log y$, $y(\frac{\pi}{2}) = e$; b) $t \sqrt{1 - y^2} dt + y \sqrt{1 - t^2} dy = 0$, $y(0) = 1$;

c) $t(y + 1)y' = y$, $y(e) = 1$; d) $y \cos t dt - (1 + y^2) dy = 0$, $y(0) = 1$;

e) $y' = y^2(1 + t^2)$, $y(0) = -2$; f) $e^y (y' - 1) = 1$, $y(0) = 0$.

Zadanie 8. Znajdź rozwiązania następujących równań jednorodnych

a) $ty' = \sqrt{t^2 - y^2} + y$; b) $(t - y) dt + t dy = 0$; c) $ty' = y(\log y - \log t)$;

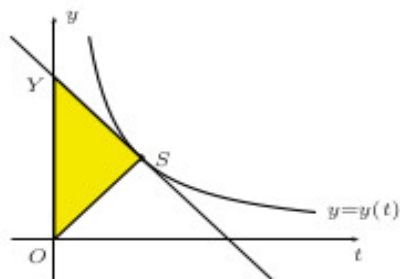
d) $ty' - y = t \operatorname{tg} \frac{y}{t}$; e) $(t^2 - y^2) dt + ty dy = 0$; f) $t^2 y' = ty + y^2$.

Zadanie 9. Rozwiąż następujące zagadnienia początkowe dla równań jednorodnych i znajdź przedziały, na których są określone

a) $(t^2 + y^2) dt - 2ty dy = 0$, $y(1) = \sqrt{2}$; b) $ty' = t + \frac{1}{2}y$, $y(1) = 0$;

c) $y' = \frac{4y^2 - t^2}{2ty}$, $y(1) = 1$; d) $(y^3 - t^3) dt - ty^2 dy = 0$, $y(1) = 3$.

Zadanie 10. Znajdź wszystkie krzywe na płaszczyźnie takie, że dla każdego punktu S krzywej, trójkąt OSY utworzony przez oś OY, styczną w punkcie S i wektor \vec{OS} jest trójkątem równoramiennym.



Zadanie 11. Rozwiąż następujące liniowe równania różniczkowe

a) $y' + y = \sin t$; b) $y' + 2ty = e^{-t^2}$; c) $ty' - 2y = t^3 \cos t$

d) $ty' - 2y = 4t^4$; e) $ty + e^t - ty' = 0$; f) $(2t + 1)y' = 4t + 2y$.