Lista 2. Wstęp do równań różniczkowych zwyczajnych, cd.

Zadanie 1. a) Załóżmy, że $\psi(t)$ jest rozwiązaniem równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (LN) $y' + p(t)y = q(t)$, a funkcja $\phi(t) \neq 0$ rozwiązaniem części jednorodnej tego równania (LJ) $y' + p(t)y = 0$, gdzie funkcje $p(t), q(t)$ są ciągłe na przedziale (a, b). Pokazać, że każde rozwiązanie $y(t)$ równania niejednorodnego można przedstawić w postaci $y(t) = C\phi(t) + \psi(t))$, gdzie C jest odpowiednio dobraną stałą. rzeczywistą.

b) Załóżmy, że funkcje $\eta(t), \psi(t)$ są różnymi $(\eta(t) \neq \psi(t))$ rozwiązaniami równania różniczkowego liniowego niejednorodnego (LN). Pokazać, że każde rozwiązanie $y(t)$ równania niejednorodnego ma postać $y(t) = C(\eta(t) - \psi(t)) + \eta(t)$, gdzie C jest odpowiednio dobraną stałą.

Zadanie 2. Wyznaczyć rozwiązania podanych zagadnień początkowych dla równań liniowych niejednorodnych oraz podać przedziały, na których są one określone:

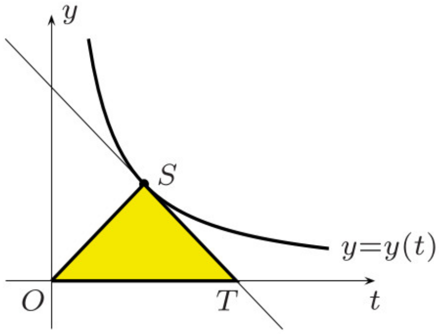
$$\begin{array}{ll} a)\ y' - y = 1,\ y(3) = 3, & b)\ y' = (y+1)\sin(t),\ y(t_0) = y_0, \\ c)\ ty' + y = t + 1,\ y(1) = 0, & d)\ y' \sin t \cos t = y + \sin^3 t,\ y(\pi/4) = 0. \end{array}$$

Zadanie 3. Dla równania liowego niejednorodnego $y' + py = q(t)$, gdzie $p \in \mathbb{R}$ wyznaczyć rozwiązanie $\psi(t)$ w podanej postaci, jeżeli:

a) $p = 4,\ q(t) = t^2 - 1,\ \phi(t) = At^2 + Bt + C;$
b) $p = 1,\ q(t) = t^4,\ \phi(t) = At^4 + Bt^3 + Ct^2 + Dt + E;$
c) $p = -3,\ q(t) = 4t^2e^{-t},\ \phi(t) = (At^2 + Bt + C)e^{-t};$
d) $p = -1,\ q(t) = te^t,\ \phi(t) = (At + B)te^t;$
e) $p = 2,\ q(t) = \cos 3t,\ \phi(t) = A\sin 3t + B\cos 3t;$
f) $p = -2,\ q(t) = 2\sin\frac{t}{2} - \cos\frac{t}{2},\ \phi(t) = A\sin\frac{t}{2} + B\cos\frac{t}{2};$

Zadanie 4. Znaleźć rozwiązanie równania różniczkowego liniowego niejednorodnego $t^2y' + y = (t^2 + 1)e^t$ spełniające warunek $\lim\limits_{t \to -\infty} y(t) = 1$.

Zadanie 5. Znaleźć równanie krzywej przechodzącej przez punkt $(1, 1)$, dla której pole trójkąta OST



utworzonego przez oś Ot, styczną i wektor wodzący punktu styczności jest stałe i równa się 1.

Zadanie 6. Rozwiązać podane równania różniczkowe Bernoulliego:

$a)$ $y' + 2ty = 2ty^2$; $b)$ $3ty^2y' - 2y^3 = t^3$; $c)$ $t(y' + y^2) = y$;

$d)$ $y' - 2y = \sqrt{y}\sin t$; $e)$ $y' + \frac{y}{t} = ty\sqrt{y},\ t > 0$; $f)$ $y' = y(y^2e^t - 1)$.

Zadanie 7. Rozwiązać podane zagadnienia początkowe dla równań różniczkowych Bernoulliego oraz wyznaczyć przedziały, na których są one określone:

$a)$ $t^2y' + 2ty = y^3,\ t > 0,\ y(1) = -1$; $b)$ $ty' + y = y^2\log t,\ y(1) = 1$;

$c)$ $y' - 2y = 2\sqrt{y}e^t\ln t,\ y(1) = 0$; $d)$ $2y'\ln t + \frac{y}{t} = \frac{1}{y},\ y(e) = \sqrt{e}$.