1 Funkcje dwóch i trzech zmiennych

Zadanie 1. Spośród podanych zbiorów na płaszczyźnie lub w przestrzeni wskazać te, które są ograniczone, otwarte, domknięte. Które z tych zbiorów są obszarami:

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y < 2x^2\}$;
b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : xyz = 0\}$;
c) $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 < 9\}$.

Zadanie 2. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji::

a) $f(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y-1} + \sqrt{x-2}$, *b)* $f(x, y) = \ln \frac{x^2+y^2-4}{9-x^2-y^2}$, *c)* $f(x, y, z) = \frac{x^2 y}{\sqrt{x^2+y^2-25}}$,

d) $f(x, y, z) = \arcsin(x^2 + y^2 + z^2 - 2)$, *e)* $f(x, y) = \frac{\sqrt{4-x^2}}{\sqrt{y^2-1}}$, *f)* $f(x, y) = \frac{\sqrt{4-x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2-1}}$

g) $f(x, y) = \ln(9 - y) + \sqrt[4]{y - x^2}$.

Zadanie 3. Znaleźć poziomice wykresów podanych funkcji i na tej podstawie naszkicować te wykresy:

a) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, *b)* $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, *c)* $f(x, y) = \sin y$,

d) $f(x, y) = e^{x-y}$, *e)* $f(x, y) = \frac{1}{1+x^2+y^2}$, *f)* $f(x, y) = -\sqrt{9 - y^2}$

Zadanie 4. Opisać, za pomocą jakich przekształceń, z wykresu funkcji $z = f(x, y)$ można otrzymać wykresy funkcji:

a) $z = f(x, y) - 5$; *b)* $z = f(x + 3, y - 2)$; *c)* $z = -f(x, y)$;

d) $z = f(2x, 3y)$; *e)* $z = f(-x, y)$; *f)* $z = |f(x, y)|$;

g) $z = 4f(x, y)$; *h)* $z = f(x, |y|)$; *i)* $z = f(|x|, |y|)$.

Zadanie 5. Naszkicować wykresy funkcji dwóch zmiennych:

a) $z = 6 - 3x + 2y$; *b)* $z = 3(x^2 + y^2)$; *c)* $z = 4 - x^2 - y^2$;

d) $z = \sqrt{y - x^2}$; *e)* $z = \sqrt{5 - x^2 - y^2}$; *f)* $z = 1 - \sqrt{2x - x^2 + 4y - y^2}$;

g) $z = -\sqrt{4 - y^2}$; *h)* $z = \sqrt{x^2 - y^2}$; *i)* $z = 1 - \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2}$.

Zadanie 6. Zbadać, które z funkcji są ograniczone, ograniczone z dołu, ograniczone z góry w swoich dziedzinach naturalnych:

a) $f(x, y) = \sin x + \cos y$; *b)* $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$; *c)* $f(x, y, z) = x^2 + y^4$;

d) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$; *e)* $f(x, y, z) = \frac{1}{x^2+y^2+z^2+4}$; *f)* $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$.

Zadanie 7. Zbadać, czy podane ciągi punktów na płaszczyźnie lub w przestrzeni są zbieżne (dla ciągów zbieżnych wskazać ich granice):

$$a)\ (x_n, y_n) = ((-1)^n, \sin\tfrac{\pi}{n}), \quad b)\ (x_n, y_n, z_n) = \left(\tfrac{n^2}{n^2+1}, \sqrt[n]{2}, 3\right).$$

Zadanie 8. Obliczyć (jeżeli istnieją) podane granice funkcji:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)\sin\tfrac{1}{xy}, \quad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{1-\cos(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^2},$$
$$c)\ \lim_{(x,y)\to(1,1)} \tfrac{x+y-2}{x^2+y^2-2}, \quad d)\ \lim_{(x,y)\to(\pi,0)} \tfrac{\sin^2 x}{y^2},$$
$$e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} y\ln(x^2+y^2), \quad f)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^2y}{x^2+y^2},$$
$$g)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^4+y^4}{x^2+y}, \quad h)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \tfrac{x^2y}{x^2+y^3}.$$

Zadanie 9. Znaleźć zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

$$a)\ f(x,y,z) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2-y^2} & \text{dla } x^2+y^2 \le 1 \\ 0 & \text{dla } x^2+y^2 > 1, \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} \sin x & \text{dla } y \ge 0 \text{ oraz } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{dla } y < 0 \text{ oraz } x \in \mathbb{R}, \end{cases}$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} e^x & \text{dla } x < y, \\ e^y & \text{dla } x \ge y. \end{cases}$$