1 Funkcje dwóch i trzech zmiennych

Zadanie 1. Obliczyć granice funkcji:

$a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(2,1)}(2x-4y^2+1)$, $\quad b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{2x^2-3y^2+1}{3x^2+2y^2-1}$,

$c)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,-1)}(x^2+3y^2-xy)$, $\quad d)\ \lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)}\frac{x+y}{xy}$,

$e)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,3)}\frac{y}{\sqrt{x+y}}$, $\quad f)\ \lim\limits_{(x,y)\to(\pi/4,3\pi/4)}\frac{\sin(x+y)}{3x-2y}$,

$g)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,1,-1)}\frac{2xy+z^2}{x^2+y^2-z^2}$, $\quad h)\ \lim\limits_{(x,y,z)\to(1,0,2)}\ln\frac{x^2+z^2}{x+y+z}$.

Zadanie 2. Obliczyć (jeżeli istnieją) podane granice funkcji:

$a)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{1+x^2+y^2}-1}{x^2+y^2}$, $\quad b)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(1+x^2+y^2)^{\frac{1}{x^2+y^2}}$,

$c)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\cos\frac{1}{|x|+|y|}$, $\quad d)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,3)}\frac{\sin^2 x^2y}{x^2}$,

$e)\ \lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x^3-y^3}{y-x}$, $\quad f)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3y-xy^3}{x^2+y^2}$,

$g)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}$, $\quad h)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^4-y^4)}{x^2+y^2}$,

$i)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sqrt{x^2y^2z^2+1}-1}{x^2+y^2+z^2}$, $\quad j)\ \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^4+y^6+z^8}{x^2+y^2+z^2}$.

Zadanie 3. Pokazać, że funkcja

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{x^2y}{x^4+y^2} & \text{dla } (x,y)\neq(0,0),\\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

jest ciągła wzdłuż każdej prostej przechodzącej przez punkt $(0,0)$, ale nie jest ciągła w tym punkcie.