1 Pochodne

Zadanie 1. Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych funkcji we wskazanych punktach:

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} x^2+y^2 & \text{dla } xy=0, \\ 1 & \text{dla } xy\neq 0, \end{cases} \qquad (x_0,y_0)=(0,0),$$

$$b)\ f(x,y,z) = \sqrt[5]{xy(z-1)}, \qquad (x_0,y_0,z_0)=(0,0,1),$$

$$c)\ f(x,y) = \begin{cases} x & \text{dla } y=0, \\ y^2 & \text{dla } x=0, \\ 1 & \text{w pozostałych punktach}, \end{cases} \qquad (x_0,y_0)=(0,0).$$

Zadanie 2. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji:

$$a)\ f(x,y)=\operatorname{arctg}\frac{1-xy}{x+y}, \quad b)\ f(x,y,z)=\frac{x}{x^2+y^2+z^2},$$

$$c)\ f(x,y)=e^{\sin\frac{y}{x}}, \qquad d)\ f(x,y,z)=\sin(x\cos(y\sin x)).$$

Zadanie 3. Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji i sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe:

$$a)\ f(x,y)=\sin(x^2+y^2), \qquad b)\ f(x,y)=xe^{xy},$$
$$c)\ f(x,y,z)=\ln(x^2+y^4+z^6+1), \quad d)\ f(x,y,z)=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Zadanie 4. Zbadać, czy równość $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$ jest prawdziwa dla funkcji:

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y^3}{x^2+y^2}, & \text{dla } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{dla } (x,y)=(0,0), \end{cases} \qquad b)\ f(x,y)=\sqrt[3]{x^6-8y^3}.$$

Zadanie 5. Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe podanych funkcji:

$$a)\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y^2},\ f(x,y)=\sin xy, \qquad b)\ \frac{\partial^4 f}{\partial y^2\partial x\partial y},\ f(x,y)=\frac{x+y}{x-y},$$

$$c)\ \frac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial z},\ f(x,y,z)=\frac{x^2y^3}{z}, \quad d)\ \frac{\partial^5 f}{\partial x\partial y^2\partial z^2},\ f(x,y,z)=e^{xy+z},$$

Zadanie 6. Funkcja $f(x,y)$ jest różniczkowalna w punkcie (x_0,y_0), jeśli

$$\lim_{\Delta x,\Delta_y\to 0}\frac{f(x,y)-(f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=0$$

inaczej

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})$$

Zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach:

$a)$ $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}, \quad (x_0, y_0) = (0,0),$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2} & \text{dla } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{dla } (x,y) = (0,0), \end{cases} \qquad (x_0,y_0) = (0,0)$$

$c)$ $f(x,y,z) = \sqrt{x^4+y^4+z^4}, \quad (x_0,y_0,z_0) = (0,0,0).$

Zadanie 7. Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

$a)$ $z = \frac{\arcsin x}{\arcsin y}, \quad (x_0,y_0,z_0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right),$

$b)$ $z = x^y, \quad (x_0,y_0,z_0) = (2,4,16),$

Zadanie 8. Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

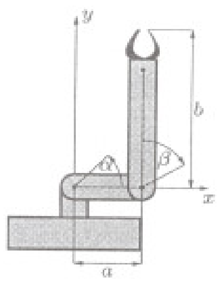
$a)$ $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2, \quad b)$ $\sqrt[3]{(2.93)^3 + (4.05)^3 + (4.99)^3},$

Zadanie 9.

a) Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością ±1mm. Otrzymano $h = 350$ mm oraz $r = 145$ mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość V tego stożka?

b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości $a = 3$m, $b = 4$m, $c = 12$m. Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu d, jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2cm.

c) Robot do zgrzewania karoserii samochodowych składa się z dwóch przegubowych ramion o długości $a = 1$m, $b = 2$m (rysunek).



Położenie zgrzewarki jest określone przez kąty $\alpha = \pi/4$, $\beta = \pi/3$. Obliczyć w przybliżeniu dokładność jej położenia, jeżeli kąty odchylenia ramion ustawione są z dokładnością $\Delta_\alpha = \Delta_\beta = 0,003$rd.

Zadanie 10. Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem x i y podanych funkcji:

$a)$ $z = f(u,v) = \ln\frac{u}{v+1}, \quad u = x\sin y, \quad v = x\cos y,$

$b)$ $z = f(u,v,w) = \arcsin\frac{u}{v+w}, \quad$ gdzie $u = e^{\frac{x}{y}}, \quad v = x^2+y^2, \quad w = 2xy.$

Zadanie 11. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

$a)$ $f(x,y) = 2|x| + |y|$, $(x_0, y_0) = (0,0)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$,
$b)$ $f(x,y) = \sqrt[3]{xy}$, $(x_0, y_0) = (1,0)$, $\vec{v} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Zadanie 12. Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

$a)$ $f(x,y) = x^2 + y^2$, $(x_0, y_0) = (-3,4)$, $\vec{v} = \left(\frac{12}{13}, \frac{5}{13}\right)$
$b)$ $f(x,y,z) = e^{xyz}$, $(x_0, y_0, z_0) = (-1,1,-1)$, $\vec{v} = \left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4}\right)$.