

Zagadnienia omawiane na wykładzie w dn. 3.03.26

1. Równania różniczkowe zwyczajne I rzędu.

Ogólna postać równania: $\Phi(y'(t), y(t), t) = 0$ dla $t \in (a, b)$.

Zadaniem jest znalezienie nieznannej funkcji $y(t)$, $t \in (a, b)$ spełniającej powyższe równanie.

Określenie 'równanie różniczkowe zwyczajne I rzędu' oznacza, że przedmiotem rozważań jest równanie, w którym nieznaną jest funkcja jednej zmiennej $y = y(t)$ i występuje w nim jej pochodna I rzędu $y'(t)$ oraz (ewentualnie) argument t .

Przykład 1.

$$y'(t) = 0, t \in \mathbb{R}$$

Odpowiedź: rozwiązaniem równania jest funkcja $y(t) = C$, $t \in \mathbb{R}$, gdzie C - jest dowolną stałą. Innych rozwiązań nie ma.

Uzasadnienie, że jedynymi rozwiązaniami są funkcje stałe: niech $y(t)$ będzie rozwiązaniem równania. Wybierzmy dowolnie $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. Wtedy stosując tw. Lagrange'a o wartości średniej otrzymujemy

$$y(t_2) - y(t_1) = y'(\xi)(t_2 - t_1) = 0,$$

dla pewnego $\xi \in (t_1, t_2)$. Stąd już wynika, że $y(t)$ jest funkcją stałą.

Przykład 2.

$$\begin{aligned} y' &= y, t \in \mathbb{R} \\ y' - y &= 0 \cdot e^{-t} \\ 0 &= y'e^{-t} - ye^{-t} = (ye^{-t})' \end{aligned}$$

Stąd

$$ye^{-t} = C, y = Ce^t,$$

gdzie C jest dowolną stałą, $t \in \mathbb{R}$.

Przykład 3. Rozpad radioaktywnej substancji radioaktywnej.

Założenie: Prędkość rozpadu $m'(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{m(t+\Delta t) - m(t)}{\Delta t}$ w chwili t jest proporcjonalna do masy substancji $m(t)$ w chwili t

$$(1) \quad m'(t) = km(t),$$

gdzie $k < 0$ jest współczynnikiem proporcjonalności rozpadu radioaktywnego, $t \geq t_0$ i t_0 - jest chwilą początkową. Z zależności (1) otrzymujemy $m(t)$, jak następuje:

$$\begin{aligned} 0 &= m'(t) - km(t) \cdot e^{-kt} \\ 0 &= m'(t)e^{-kt} - km(t)e^{-kt} = (m(t)e^{-kt})'. \end{aligned}$$

Stąd

$$m(t)e^{-kt} = C, \quad m(t) = Ce^{kt},$$

gdzie C jest dowolną stałą, $t \in \mathbb{R}$. Jest to rozwiązanie ogólne równania. Znając masę początkową $m_0 = m(t_0)$ w chwili początkowej t_0 (ta dodatkowa informacja nazywana jest warunkiem początkowym), z rodziny wszystkich rozwiązań (z rozwiązania ogólnego) $m(t) = Ce^{kt}$ wyznaczamy jedno rozwiązanie szczególne spełniające warunek początkowy:

$$m_0 = C_0 e^{kt_0}, \quad C_0 = m_0 e^{-kt_0}$$

Stąd masa substancji radioaktywnej w chwili t wyraża się wzorem

$$m(t) = m_0 e^{k(t-t_0)}, \quad t \geq t_0 \quad (k < 0)$$

Czas połowicznego rozpadu to czas T , w którym rozpadowi ulegnie połowa masy początkowej :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}m_0 &= m_0 e^{kT} \\ e^{kT} &= \frac{1}{2} \\ kT &= -\ln 2, \quad T = \frac{-\ln 2}{k}, \quad k = \frac{-\ln 2}{T}. \end{aligned}$$

Używając czasu połowicznego rozpadu T zamiast parametru k masa substancji radioaktywnej w chwili t wyraża się następująco:

$$m(t) = m_0 e^{-\frac{t-t_0}{T} \ln 2}$$

Równania o zmiennych rozdzielonych.

Równania, które można zapisać w formie

$$y' = f(t)/g(y), \quad t \in (a, b)$$

nazywamy równaniami o zmiennych rozdzielonych.

Algorytm rozwiązania

$$y'(t)g(y(t)) = f(t) \quad \setminus \int \dots dt$$
$$\int g(y(t))y'(t)dt = \int f(t)dt$$

Wyznaczamy funkcje pierwotne

$$G(z) = \int g(z)dz, \quad F(z) = \int f(z)dz.$$

Stąd otrzymujemy zależność

$$G(y(t)) = F(t) + C,$$

C - jest stałą (mogą być pewne ograniczenia jej wartości wynikające z własności funkcji G i F).

Na ogół w takiej formie podajemy rozwiązanie ogólne równania o rozdzielonych zmiennych.

Uwaga. Jeżeli można w sposób jawny znaleźć funkcję odwrotną G^{-1} , to rozwiązanie ogólne można przedstawić w sposób jawny

$$y(t) = G^{-1}(F(t) + C).$$

Przykład 4. Rozwiązać równanie

$$2y'y = \sin t.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, gdzie

$$f(t) = \sin t, \quad g(y) = 2y$$
$$F(t) = -\cos t, \quad G(y) = y^2.$$

Rozwiązaniem ogólnym jest

$$y(t)^2 = -\cos t + C.$$

Zauważamy, że

1. dla $C \leq -1$ równanie nie ma rozwiązań,

2. dla $-1 < C < 1$ są ograniczenia na t ,
3. dla $1 \leq C$ rozwiązania są określone dla wszystkich $t \in \mathbb{R}$.

W końcu znajdujemy jawną postać rozwiązania

$$y(t) = \sqrt{-\cos t + C} \quad \text{lub} \quad y(t) = -\sqrt{-\cos t + C},$$

gdzie $C > -1$ jest dowolną stałą.

Przykład 5. Rozwiązać równanie

$$y'(y^{4/3} + 1) = \sin t.$$

Jest to równanie o zmiennych rozdzielonych, gdzie

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin t, & g(y) &= y^{4/3} + 1 \\ F(t) &= -\cos t, & G(y) &= \int g(y) dy = \frac{3}{7}y^{7/3} + y. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem ogólnym jest

$$\frac{3}{7}y(t)^{7/3} + y(t) = -\cos t + C,$$

gdzie, podobnie jak w poprzednim przykładzie $C > -1$ jest dowolną stałą. Z uwagi na trudności w znalezieniu jawnej postaci rozwiązania ($y(t) = \dots$) rozwiązanie ogólne pozostawiamy w powyższej postaci.

Równania różniczkowe o rozdzielonych zmiennych w **formie symetrycznej**

$$g(y)dy - f(t)dt = 0.$$

Rozwiązaniem tego równania jest

1. funkcja $y = y(t)$, jeżeli spełnia ona równanie $y'(t)g(y(t)) - f(t) = 0$
2. funkcja $t = t(y)$, jeżeli spełnia ona równanie: $g(y) - t'(y)f(t(y)) = 0$

Ostatecznie rozwiązanie ogólne podajemy w postaci

$$G(y) = F(t) + C,$$

gdzie

$$G(y) = \int g(y) dy, \quad F(t) = \int f(t) dt$$

i C jest stałą.

Przykład 6. Rozwiązać równanie $t dt + y dy = 0$

1. Dla rozwiązań postaci $y = y(t)$, równanie przyjmuje wtedy postać $t + y'(t)y(t) = 0$

Wyznaczenie rozwiązania:

$$\begin{aligned}y'y &= -t \\g(y) &= y, f(t) = -t \\G(y) &= \int y dy = \frac{1}{2}y^2, F(t) = \int -t dt = -\frac{1}{2}t^2\end{aligned}$$

Rozwiązaniem ogólnym jest $y^2(t) = -t^2 + C$, gdzie C jest dowolną stałą większą od zera, $t \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C})$

2. Dla rozwiązań postaci $t = t(y)$, równanie przyjmuje postać $t'(y)t(y) + y = 0$

$$\begin{aligned}y &= -t't \\g(y) &= y, f(t) = -t \\G(y) &= \int y dy = \frac{1}{2}y^2, F(t) = \int t dt = -\frac{1}{2}t^2\end{aligned}$$

Rozwiązaniem ogólnym jest $y^2 = -t^2 + C$, gdzie C jest dowolną stałą większą od zera, $y \in (-\sqrt{C}, \sqrt{C})$

Równania różniczkowe zwyczajne **liniowe** I rzędu.

$$y'(t) + p(t)y(t) = f(t), t \in \mathbb{R}.$$

funkcje $p(t)$ spełnia następujące warunki $f(t)$ są dane.

Operacja $L[y] = y'(t) + p(t)y(t)$ ma następujące własności

1. $L[\alpha y] = \alpha L[y]$ dla dowolnej (różniczkowalnej) funkcji $y = y(t)$ i dowolnego $\alpha \in \mathbb{R}$

2. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2]$ dla dowolnych funkcji (różniczkowalnych) $y_1 = y_1(t)$ i $y_2 = y_2(t)$

Operacja L spełniająca warunki 1. i 2. jest nazywana operacją liniową, stąd określenie równania liniowego.

Rozwiązanie:

Niech $P(t) = \int p(t)dt$ będzie jedną wybraną funkcją pierwotną funkcji $p(t)$

$$\begin{aligned} y'(t) + p(t)y(t) &= f(t) \cdot e^{P(t)} \\ f(t)e^{P(t)} &= y'(t)e^{P(t)} + p(t)e^{P(t)}y(t) = (y(t)e^{P(t)})' \\ y(t)e^{P(t)} &= \int f(t)e^{P(t)}dt + C, \end{aligned}$$

gdzie $\int f(t)e^{P(t)}dt$ oznacza jedną wybraną funkcją pierwotną funkcji podcałkowej i C jest dowolną stałą. Ostatecznie, rozwiązaniem ogólnym równania jest

$$y(t) = \underbrace{e^{-P(t)} \int e^{P(t)} f(t)dt}_{y_I(t)} + \underbrace{Ce^{-P(t)}}_{y_{II}(t)}$$

Uwaga

Pierwszy składnik rozwiązania $y_I(t) = e^{-P(t)} \int e^{P(t)} f(t)dt$ jest rozwiązaniem szczególnym równania liniowego niejednorodnego (odpowiadającym stałej $C = 0$), drugi składnik $y_{II}(t) = Ce^{-P(t)}$ jest ogólnym rozwiązaniem równania $y'(t) + p(t)y(t) = 0$ nazywanego równaniem liniowym jednorodnym.

Przykład 7. Rozwiązać równanie

$$y' + ty = e^{-\frac{1}{2}t^2+t}.$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} P(t) &= \int tdt = \frac{1}{2}t^2, \\ \int e^{P(t)} f(t)dt &= \int e^{\frac{1}{2}t^2} \cdot e^{-\frac{1}{2}t^2+t} dt = \int e^t dt = e^t \\ y_I(t) &= e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot e^t, \quad y_{II}(t) = Ce^{-\frac{1}{2}t^2}, \\ y(t) &= e^{-\frac{1}{2}t^2} \cdot e^t + Ce^{-\frac{1}{2}t^2}. \end{aligned}$$