Analiza Matematyczna F2. Lista 1a

Zadanie 1. Wyznaczyć i narysować dziedziny naturalne podanych funkcji:

$$a)\ f(x,y)=\sqrt{x\sin y}\quad b)\ g(x,y)=\arcsin\sqrt{y-\sqrt{x}}.$$

Zadanie 2. Zbadać, czy podane ciągi punktów na płaszczyźnie lub w przestrzeni są zbieżne

$$a)\ (x_n,y_n)=\left(\arcsin\tfrac{n^2-1}{n^2+1},\ \sin\tfrac{\pi(n^2+1)}{2n}\right);\quad b)\ (x_n,y_n,z_n)=\left(\sqrt[n]{n},\tfrac{1}{n},\ln\tfrac{n}{n+1}\right).$$

Zadanie 3. Obliczyć, jeżeli istnieją, podane granice funkcji:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{x}{x+y};\qquad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{(xy)^2}{x^2+y^2};$$

$$c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{-\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}}}{\sqrt{x^2+y^2}};\quad d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{xy}{3x^2+2y}.$$

Zadanie 4. Znaleźć zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

$$a)\ f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2} & \text{dla } x\ge 0\\ 2 & \text{dla } x<0\end{cases};\quad b)\ f(x,y,z)=\tfrac{xy+1}{x^2+z^2-1}$$

Zadanie 5. Pokazać, że następujące podzbiory płaszczyzny są otwarty

$$A=\{(x,y):-1<x<1,\ -1<y<1\},\quad B=\{(x,y):\ y>0\}$$
$$C=\{(x,y):\ 2<x^2+y^2<4\},\quad D=\{(x,y):x\neq 0 \text{ and } y\neq 0\}$$

Zadanie 6. Obliczyć następujące granice, jeśli istnieją:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy},\quad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{\sin xy}{y},$$

$$c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2},\qquad d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{e^{xy}-1}{y},$$

$$e)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{\cos(xy)-1}{x^2y^2},\qquad f)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{xy}{x^2+y^2+2}.$$

Zadanie 7. Obliczyć następujące granice, jeśli istnieją:

$$a)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{e^{xy}}{x+1},\qquad b)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{\cos x-1-(x^2/2)}{x^4+y^4},$$

$$c)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{(x-y)^2}{x^2+y^2},\qquad d)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{\sin xy}{xy},$$

$$e)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\tfrac{\sin(xyz)}{xyz},\quad f)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\tfrac{x^2+3y^2}{x+1},$$

$$g)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)}\tfrac{\sin 2x-2x+y}{x^3+y},\quad h)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\tfrac{2x^2y\cos z}{x^2+y^2}.$$

Zadanie 8. a) Czy funkcję $\frac{\sin(x+y)}{x+y}$ można tak dookreślić w $(0,0)$ by była funkcją ciągłą?
b) Czy funkcję $\frac{xy}{x^2+y^2}$ można tak dookreślić w $(0,0)$ by była funkcją ciągłą?

Zadanie 9. Pokazać, że

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}=0.$$

Zadanie 10. Niech $\mathbf{x},\mathbf{y}\in R^2$ i $\mathbf{x}\neq\mathbf{y}$. Pokazać, że istnieje funkcja ciągła $f:R^2\to R$ taka, że $f(\mathbf{x})=1$, $f(\mathbf{y})=0$, i $0\le f(\mathbf{z})\le 1$ dla każdego $\mathbf{z}$ in R^2.