

## 2 Rachunek różniczkowy funkcji dwóch i trzech zmiennych

**Zadanie 1.** Zbadać, czy istnieją pochodne cząstkowe rzędu pierwszego pochodnych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{aligned}
 a) f(x, y) &= \begin{cases} x^2 + y^2 & \text{dla } xy = 0, \\ 1 & \text{dla } xy \neq 0, \end{cases} & (x_0, y_0) &= (0, 0), \\
 b) f(x, y, z) &= \sqrt[5]{xy(z-1)}, & (x_0, y_0, z_0) &= (0, 0, 1), \\
 c) f(x, y) &= \begin{cases} x & \text{dla } y = 0, \\ y^2 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{w pozostałych punktach,} \end{cases} & (x_0, y_0) &= (0, 0).
 \end{aligned}$$

**Zadanie 2.** Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe pierwszego rzędu podanych funkcji:

$$\begin{aligned}
 a) f(x, y) &= \arctg \frac{1-xy}{x+y}, & b) f(x, y, z) &= \frac{x}{x^2+y^2+z^2}, \\
 c) f(x, y) &= e^{\sin \frac{y}{x}}, & d) f(x, y, z) &= \sin(x \cos(y \sin x)).
 \end{aligned}$$

**Zadanie 3.** Obliczyć wszystkie pochodne cząstkowe drugiego rzędu podanych funkcji i sprawdzić, czy pochodne cząstkowe mieszane są równe:

$$\begin{aligned}
 a) f(x, y) &= \sin(x^2 + y^2), & b) f(x, y) &= xe^{xy}, \\
 c) f(x, y, z) &= \ln(x^2 + y^4 + z^6 + 1), & d) f(x, y, z) &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.
 \end{aligned}$$

**Zadanie 4.** Zbadać, czy równość  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$  jest prawdziwa dla funkcji:

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y^3}{x^2 + y^2}, & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad b) f(x, y) = \sqrt[3]{x^6 - 8y^3}.$$

**Zadanie 5.** Obliczyć wskazane pochodne cząstkowe podanych funkcji:

$$\begin{aligned}
 a) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \quad f(x, y) &= \sin xy, & b) \frac{\partial^4 f}{\partial y^2 \partial x \partial y}, \quad f(x, y) &= \frac{x+y}{x-y}, \\
 c) \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}, \quad f(x, y, z) &= \frac{x^2 y^3}{z}, & d) \frac{\partial^5 f}{\partial x \partial y^2 \partial z^2}, \quad f(x, y, z) &= e^{xy+z},
 \end{aligned}$$

**Zadanie 6.** Funkcja  $f(x, y)$  jest różniczkowalna w punkcie  $(x_0, y_0)$ , jeśli

$$\lim_{\Delta x, \Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y) - (f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y)}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = 0$$

inaczej

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})$$

Zbadać różniczkowalność podanych funkcji we wskazanych punktach:

a)  $f(x, y) = \sqrt[3]{xy}$ ,  $(x_0, y_0) = (0, 0)$ ,

b)  $f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} & \text{dla } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{dla } (x, y) = (0, 0), \end{cases} \quad (x_0, y_0) = (0, 0)$

c)  $f(x, y, z) = \sqrt{x^4 + y^4 + z^4}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ .

**Zadanie 7.** Napisać równania płaszczyzn stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach wykresu:

a)  $z = \frac{\arcsin x}{\arcsin y}$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, -1\right)$ ,

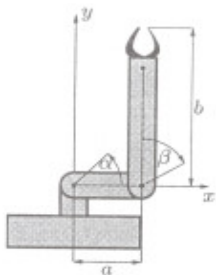
b)  $z = x^y$ ,  $(x_0, y_0, z_0) = (2, 4, 16)$ ,

**Zadanie 8.** Wykorzystując różniczkę funkcji obliczyć przybliżone wartości podanych wyrażeń:

a)  $(1.02)^3 \cdot (0.997)^2$ , b)  $\sqrt[3]{(2.93)^3 + (4.05)^3 + (4.99)^3}$ ,

**Zadanie 9.**

- a) Wysokość i promień podstawy stożka zmierzono z dokładnością  $\pm 1\text{mm}$ . Otrzymano  $h = 350$  mm oraz  $r = 145$  mm. Z jaką w przybliżeniu dokładnością można obliczyć objętość  $V$  tego stożka?
- b) Krawędzie prostopadłościanu mają długości  $a = 3\text{m}$ ,  $b = 4\text{m}$ ,  $c = 12\text{m}$ . Obliczyć w przybliżeniu, jak zmieni się długość przekątnej prostopadłościanu  $d$ , jeżeli długości wszystkich krawędzi zwiększymy o 2cm.
- c) Robot do zgrzewania karoserii samochodowych składa się z dwóch przegubowych ramion o długości  $a = 1\text{m}$ ,  $b = 2\text{m}$  (rysunek).



Położenie zgrzewarki jest określone przez kąty  $\alpha = \pi/4$ ,  $\beta = \pi/3$ . Obliczyć w przybliżeniu dokładność jej położenia, jeżeli kąty odchylenia ramion ustawione są z dokładnością  $\Delta_\alpha = \Delta_\beta = 0,003\text{rd}$ .

**Zadanie 10.** Wykorzystując reguły różniczkowania funkcji złożonych obliczyć pochodne cząstkowe pierwszego rzędu względem  $x$  i  $y$  podanych funkcji:

a)  $z = f(u, v) = \ln \frac{u}{v+1}$ ,  $u = x \sin y$ ,  $v = x \cos y$ ,

b)  $z = f(u, v, w) = \arcsin \frac{u}{v+w}$ , gdzie  $u = e^{\frac{x}{y}}$ ,  $v = x^2 + y^2$ ,  $w = 2xy$ .

**Zadanie 11.** Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

$$a) f(x, y) = 2|x| + |y|, \quad (x_0, y_0) = (0, 0), \quad \vec{v} = \left( \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \right),$$

$$b) f(x, y) = \sqrt[3]{xy}, \quad (x_0, y_0) = (1, 0), \quad \vec{v} = \left( \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2} \right).$$

**Zadanie 12.** Obliczyć pochodne kierunkowe podanych funkcji we wskazanych punktach i kierunkach:

$$a) f(x, y) = x^2 + y^2, \quad (x_0, y_0) = (-3, 4), \quad \vec{v} = \left( \frac{12}{13}, \frac{5}{13} \right)$$

$$b) f(x, y, z) = e^{xyz}, \quad (x_0, y_0, z_0) = (-1, 1, -1), \quad \vec{v} = \left( \frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{4} \right).$$