Analiza Matematyczna F2. Lista 2a

Zadanie 1. Znaleźć $\partial f/\partial x$, $\partial f/\partial y$ if

$a)\ f(x,y) = xy,\quad b)\ f(x,y) = e^{xy},$
$c)\ f(x,y) = x\cos x\cos y,\quad d)\ f(x,y) = (x^2+y^2)\ln(x^2+y^2).$

Zadanie 2. Obliczyć $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ w zadanych punktach

$a)\ z = \sqrt{a^2-x^2-y^2};\ 9),0),(a/2.,a/2)\quad b)\ z = \ln\sqrt{1+xy},\ (1,2),\ (0,0),$
$c)\ z = e^{ax}\cos(bx+y),\ (2\pi/b,0).$

Zadanie 3. Znaleźć $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$.

$a)\ w = xe^{x^2+y^2},\quad b)\ w = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2},$
$c)\ w = e^{xy}\ln(x^2+y^2),\quad d)\ w = x/y,$
$e)\ w = \cos(ye^{xy})\sin x.$

Zadanie 4. Uzasadnij, że podane funkcja jest różniczkowalna w swojej dziedzinie. Czy pochodne cząstkowe są ciągłe?

$a)\ f(x,y) = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},\quad b)\ f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},$

$c)\ f(x,y) = \frac{x}{y}+\frac{y}{x},\quad d)\ f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2},$

$e)\ f(r,\theta) = \frac{1}{2}r\sin 2\theta,\ r>0.$

Zadanie 5. Znaleźć równanie płaszczyzny stycznej do powierzchni $z = x^2+y^3$ w $(3,1,10)$.

Zadanie 6. Znaleźć równania płaszczyzn stycznych do wykresów funkcji podanych w zadaniu 1 w zadanych punktach.

$a)\ (0,0),\quad b)\ (0,1),\quad c)\ (0,\pi),\quad d)\ (0,1).$

Zadanie 7. Wyznaczyć macierze pochodnych cząstkowych następujących funkcji:

$a)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y) = (x,y),\quad b)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (xe^y+\cos y, x, x+e^y),$
$c)\ f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2,\ f(x,y,z) = (x+e^z+y, yx^2),\quad d)\ f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,\ f(x,y) = (xye^{xy}, x\sin y, 5xy^2).$

Zadanie 8. Wyznaczyć macierze pochodnych cząstkowych następujących funkcji:

$a)\ f(x,y) = (e^x,\sin xy),\quad b)\ f(x,y) = (x+y, x-y, xy),$
$c)\ f(x,y,z) = (x-y, y+z),\quad d)\ f(x,y,z) = (x+z, y-5z, x-y).$

Zadanie 9. W jakim punkcie płaszczyzna styczna do powierzchni $z = e^{x-y}$ w $(1,1,1)$ przecina oś z?

Zadanie 10. Dlaczego wykresy funkcji $f(x,y) = x^2+y^2$ i $g(x,y) = -x^2-y^2+xy^3$ mogą byc nazywane "stycznymi" w $(0,0)$?

Zadanie 11. Niech $f(x,y)=e^{xy}$. Pokazać, że $x(\partial f/\partial x)=y(\partial f/\partial y)$.

Zadanie 12. Użyj odpowiedniej różniczki funkcji do aproksymacji nastepujących wyrażeń:

$$a)\ (0.99e^{0.02})^8,\quad b)\ (0.99)^3+(2.01)^3-6(0.99)(2.01),\quad c)\ \sqrt{(4.01)^2+(3.98)^2+(2.02)^2}.$$

Zadanie 13. Obliczyć gradienty i napisać równania płaszczyzn stycznych w $(1,0,1)$ dla następujących funkcji:

$f(x,y,z)=x\exp(-x^2-y^2-z^2)$.

$f(x,y,z)=\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$, $\quad f(x,y,z)=z^2e^x\cos y$.