

Zadanie 1. Napisać wzór Taylora z resztą R_n dla podanych funkcji w otoczeniu wskazanych punktów, jeżeli

a) $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2)$, $(x_0, y_0) = (0, 0)$, $n = 2$,

b) $f(x, y) = (x + y)^3$, $(x_0, y_0) = (-1, 1)$, $n = 4$.

Zadanie 2. Zbadać, czy podane funkcje mają ekstrema lokalne

a) $f(x, y) = 2|x| + 3|y|$, b) $f(x, y) = 2x^4 - 3y^7$.

Zadanie 3. Znaleźć ekstrema podanych funkcji:

a) $f(x, y) = 3(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2$, b) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

c) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 51x - 24y$, d) $f(x, y) = e^{-(x^2+y^2+2x)}$,

e) $f(x, y) = xy^2(12 - x - y)$, f) $f(x, y) = \frac{8}{x} + \frac{x}{y} + y$.

Zadanie 4. Znaleźć najmniejsze i największe wartości podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

a) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $|x| + |y| \leq 2$,

b) $f(x, y) = xy^2 + 4xy - 4x$, $-3 \leq x \leq 3$, $-3 \leq y \leq 0$,

c) $f(x, y) = x^4 + y^4$, $x^2 + y^2 \leq 9$,

d) $f(x, y) = \frac{(x^2-1)(y^2-1)}{x^2+y^2+2}$, \mathbb{R} .

Zadanie 5.

- a) W trójkącie o wierzchołkach $A = (-1, 5)$, $B = (1, 4)$, $C = (2, -3)$ znaleźć punkt $M = (x_0, y_0)$, dla którego suma kwadratów jego odległości od wierzchołków jest najmniejsza.
- b) Jakie powinny być długość a , szerokość b i wysokość h prostopadłościenniej otwartej wanny o pojemności V , aby ilość blachy zużytej do jej zrobienia była najmniejsza?
- c) Znaleźć odległość między prostymi skośnymi:

$$k : \begin{cases} x + y - 1 = 0, \\ z + 1 = 0, \end{cases} \quad l : \begin{cases} x - y + 3 = 0, \\ z - 2 = 0, \end{cases}$$

- d) Prostopadłościenny magazyn ma mieć objętość $V = 216\text{m}^3$. Do budowy magazynu używane są płyty w cenie $30\text{zł}/\text{m}^2$, do budowy podłogi w cenie $40\text{zł}/\text{m}^2$, a sufitu w cenie $20\text{zł}/\text{m}^2$. Znaleźć długość a , szerokość b i wysokość c magazynu, którego koszt budowy będzie najmniejszy.
- e) Wśród trójkątów wpisanych w koło o promieniu R znaleźć ten, który ma największe pole.
- f) Na trzech parami skośnych krawędziach sześciangu (rysunek) wyznaczyć po jednym punkcie w ten sposób, aby pole trójkąta o wierzchołkach w tych punktach było najmniejsze.

Zadanie 6. Korzystając z metody mnożników Lagrange'a znaleźć ekstrema lokalne funkcji dwóch zmiennych przy wskazanych ograniczeniach:

(a) $f(x, y) = 5 - 3x - 4y$, $x^2 + y^2 = 25$; b) $f(x, y) = x + y$, $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 1$.

Zadanie 7.

(a) Wyznaczyć półosie wielką i małą elipsy $7x^2 - 6xy + 7y^2 = 8$. Wsk. zauważyć, że jeśli punkt (x, y) leży na tej elipsie, to również punkt $(-x, -y)$ leży na tej elipsie, czyli $(0, 0)$ jest środkiem elipsy,

(b) Na paraboli $y = x^2 + 1$ znaleźć punkt położony najbliżej punktu $B = (3, 0)$.

Zadanie 8. Znaleźć długości a, b, c krawędzi prostopadłościanu o objętości $V = 27$, który ma najmniejsze pole powierzchni całkowitej.

Zadanie 9. Znaleźć krawędzie a, b, c prostopadłościanu o największej objętości, którego powierzchnia całkowita wynosi $P = 24\text{cm}^2$.

Zadanie 10. Suma trzech liczb dodatnich x, y, z wynosi 120. Jaki jest największy możliwy ich iloczyn?

Zadanie 11. Na powierzchni określonej równaniem $xyz = 1$ wyznaczyć punkt, który leży najbliżej początku układu współrzędnych.

Zadanie 12. Zbadać, czy podane równania określają jednoznacznie ciągłe funkcje uwikłane $y = y(x)$ na pewnych otoczeniach zadanych punktów:

$$a) x^y - y^x = 0, \quad i) A = (2, 4), \quad ii) B = (e, e), \quad iii) C = (3, 3),$$

$$b) x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = 0, \quad i) A = (0, 0), \quad ii) B = (1, 1), \quad iii) C = (-1, 1).$$

Zadanie 13. Napisać równania stycznych do krzywych określonych podanymi równaniami we wskazanych punktach tych krzywych:

$$a) x^3 + x - y^3 = 0, \quad (2, 2), \quad b) x^2 + y^2 - 3xy + x = 0, \quad (1, 1).$$

Zadanie 14. Obliczyć pierwszą i drugą pochodną funkcji uwikłanych $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

$$a) xe^y - y + 1 = 0, \quad b) x^2 + y^2 - 3xy = 0, \quad c) x - y = \sin x - \sin y.$$

Zadanie 15. Wyznaczyć ekstrema lokalne funkcji uwikłanych postaci $y = y(x)$ określonych podanymi równaniami:

$$a) x^2 + y^2 - xy - 2x + 4y = 0, \quad b) (x - y)^2 = y + xy - 3x.$$