

Zagadnienia omawiane na wykładzie w dn. 3.03.26

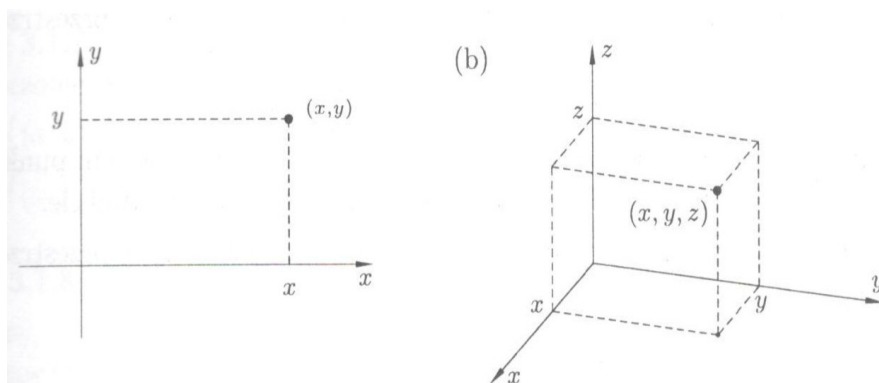
1. Przestrzeń rzeczywista:

$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$ - n - wymiarowa przestrzeń rzeczywista. Elementy przestrzeni (x_1, x_2, \dots, x_n) nazywamy jej punktami, a liczby x_1, x_2, \dots, x_n nazywamy współrzędnymi kartezjańskimi punktów. W przypadku przestrzeni niskiego wymiaru $n = 1, 2, 3$ przyjmujemy tradycyjne oznaczenia

$\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ - zbiór liczb rzeczywistych, jednowymiarowa przestrzeń rzeczywista

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$ - dwuwymiarowa przestrzeń rzeczywista

$\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$ - trójwymiarowa przestrzeń rzeczywista



Rys. 3.1.1. Współrzędne punktu (a) na płaszczyźnie; (b) w przestrzeni

Odległość punktów $P = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ i $Q = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ w przestrzeni \mathbb{R}^n :

1. odległość euklidesowa:

$$d_e(P, Q) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

2. odległość maximum: $d_{\max}(P, Q) = \max(|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|, \dots, |x_n - y_n|)$

3. odległość l^1 : $d_1(P, Q) = |x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_n - y_n|$

Aksjomaty, które spełnia każda odległość (metryka):

1. $d(P, Q) \geq 0$ dla wszystkich $P, Q \in \mathbb{R}^n$, przy czym

$$d(P, Q) = 0 \iff P = Q$$

2. $d(P, Q) = d(Q, P)$ dla wszystkich $P, Q \in \mathbb{R}^n$

3. $d(P, Q) \leq d(P, R) + d(Q, R)$ dla wszystkich $P, Q, R \in \mathbb{R}^n$ (nierówność trójkąta)

Porównanie metryk:

Lemat. Dla dowolnych punktów $P, Q \in \mathbb{R}^n$ zachodzi:

$$1. d_{\max}(P, Q) \leq d_e(P, Q) \leq \sqrt{n} d_{\max}(P, Q)$$

$$2. d_{\max}(P, Q) \leq d_1(P, Q) \leq n d_{\max}(P, Q).$$

Przykład 1. Niech $P = (0, 0)$, $Q = (3, -4)$. Wtedy

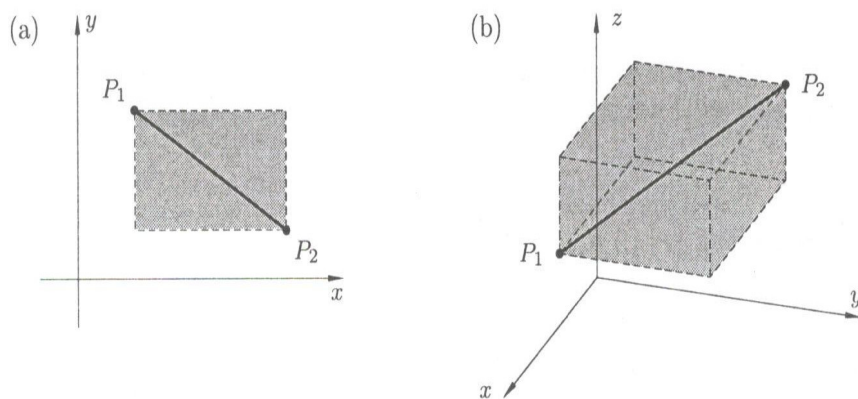
$$d_e(P, Q) = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5, \quad d_{\max}(P, Q) = \max(|3|, |-4|) = 4, \quad d_1(P, Q) = |3| + |-4| = 7.$$

Przykład 2. Niech $P = (1, -2\sqrt{3}, \sqrt{5})$, $Q = (-3, \sqrt{3}, -\sqrt{5})$. Wtedy

$$d_e(P, Q) = \sqrt{(1+3)^2 + (-2\sqrt{3}-\sqrt{3})^2 + (\sqrt{5}+\sqrt{5})^2} = \sqrt{63},$$

$$d_{\max}(P, Q) = \max(|4|, |3\sqrt{3}|, |2\sqrt{5}|) = 3\sqrt{3},$$

$$d_1(P, Q) = 4 + 3\sqrt{3} + 2\sqrt{5}.$$



Rys. 3.1.2. Odległość punktów (a) na płaszczyźnie, (b) w przestrzeni

Zbiory na płaszczyźnie i w przestrzeni (\mathbb{R}^3)

1. **Otoczenie i sąsiedztwo punktu P_0 :**

- **otoczeniem** punktu P_0 o promieniu $r > 0$ jest zbiór

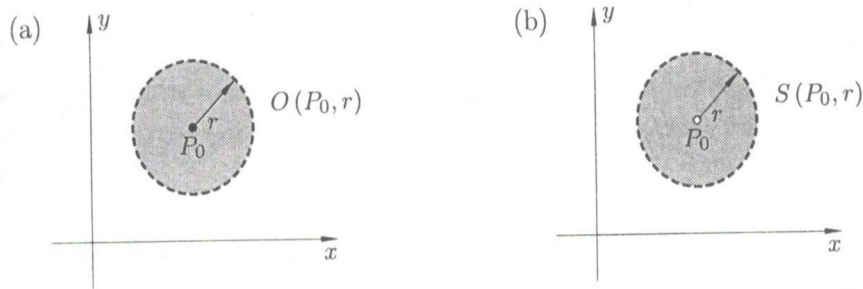
$$O(P_0, r) = \{P : d_e(P_0, P) < r\}$$

Otoczeniem na płaszczyźnie jest koło otwarte o środku w P_0 i promieniu $r > 0$. Otoczeniem w przestrzeni \mathbb{R}^3 jest kula otwarta o środku w P_0 i promieniu $r > 0$.

- **sąsiedztwem** punktu P_0 o promieniu $r > 0$ jest zbiór

$$S(P_0, r) = K(P_0, r) \setminus \{P_0\}$$

Uwaga. Otoczenie $O(P_0, r)$ określiliśmy za pomocą metryki euklidesowej d_e . Bez wpływu na dalsze rozważania zamiast metryki euklidesowej możemy użyć metryki d_{\max} lub d_1 .

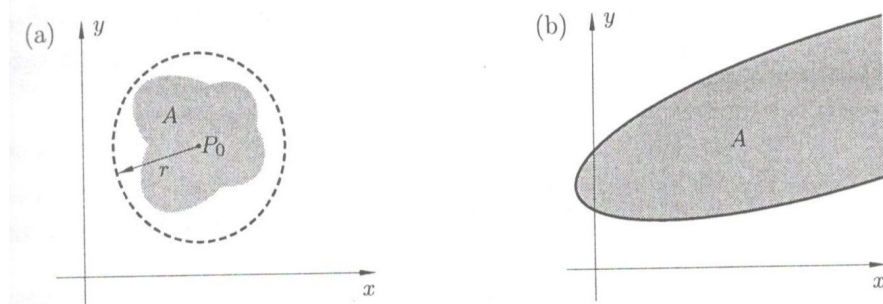


Rys. 3.1.3. (a) otoczenie punktu, (b) sąsiedztwo punktu na płaszczyźnie

Uwaga. Jeżeli promień otoczenia lub sąsiedztwa nie będzie istotny w rozważaniach, będziemy oznaczali krótko $O(P_0)$ i $S(P_0)$ odpowiednio.

Zbiór A jest **ograniczony**, jeśli jest on zawarty w otoczeniu $O(P_0, r)$ pewnego punktu P_0 , tzn. $A \subset O(P_0, r)$.

W przeciwnym przypadku, zbiór A jest **nieograniczony**.

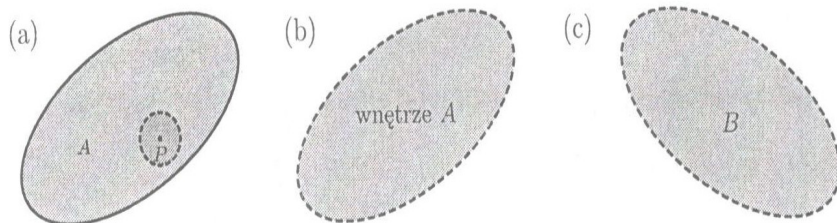


Rys. 3.1.4. (a) zbiór ograniczony, (b) zbiór nieograniczony na płaszczyźnie

Punkt wewnętrzny: Punkt $P \in A$ nazywamy punktem wewnętrznym zbioru A , jeśli istnieje otoczenie $O(P, r)$ zawarte w A , $O(P, r) \subset A$.

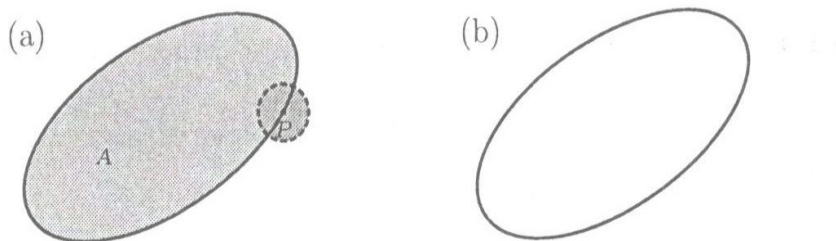
Wnętrzem zbioru A nazywamy jego podzbiór $\text{Int}(A)$ złożony ze wszystkich punktów wewnętrznych zbioru A

Mówimy, że zbiór A jest **otwarty**, jeśli każdy jego punkt jest punktem wewnętrznym, tzn. $\text{Int}(A) = A$.



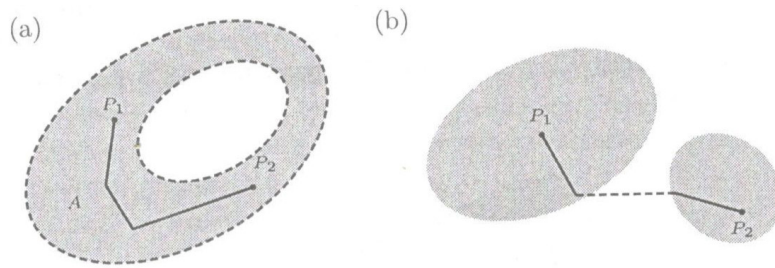
Rys. 3.1.5. (a) Punkt wewnętrzny zbioru, (b) wnętrze zbioru, (c) zbiór otwarty

Punkt brzegowy: Punkt P nazywamy **brzegowym** zbioru A , jeśli każde otoczenie $O(P, r)$, $r > 0$ punktu zawiera punkty zbioru A , tzn. $O(P, r) \cap A \neq \emptyset$ i zawiera punkty nie należące do A , tzn. $O(P, r) \cap A^c \neq \emptyset$. Zbiór punktów **brzegowych** zbioru A oznaczamy jako ∂A .



Rys. 3.1.6. (a) Punkt brzegowy zbioru, (b) brzeg zbioru

Zbiór otwarty $A \neq \emptyset$ nazywamy **obszarem**, jeżeli dowolne dwa punkty $P, Q \in A$ można połączyć łamaną całkowicie w nim zawartą. Obszar A wraz ze swoim brzegiem ∂A , $(A \cup \partial A)$ nazywamy **obszarem domkniętym**.

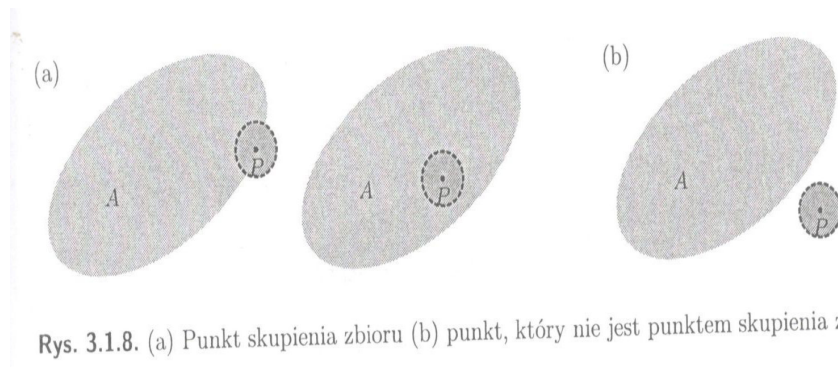


Rys. 3.1.7 (a) Obszar (b) zbiór, który nie jest obszarem

Punkt P nazywamy **punktem skupienia** zbioru A , jeżeli każde sąsiedztwo $S(P, r)$ punktu P zawiera punkty zbioru A .

Uwaga.

1. Każdy punkt wewnętrzny zbioru A jest jego punktem skupienia.
2. Zbiór punktów skupienia zbioru A jest zawarty w zbiorze $A \cup \partial A$.



Rys. 3.1.8. (a) Punkt skupienia zbioru (b) punkt, który nie jest punktem skupienia zbioru

Granica ciągu punktów $\{P_n\}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = P_0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} d_e(P_n, P_0) = 0$$

Lemat. Niech $P_n = (x_1^n, x_2^n, x_3^n, \dots, x_m^n)$, $n = 1, 2, 3, \dots$ będzie ciągiem punktów w przestrzeni \mathbb{R}^m . Wtedy ciąg punktów P_n jest zbieżny do punktu $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_m^0)$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^n = x_1^0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^n = x_2^0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_3^n = x_3^0, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^n = x_m^0.$$

Uzasadnienie.

” \Rightarrow ”

Niech $\lim_{n \rightarrow \infty} d_e(P_n, P_0) = 0$.

Ponieważ

$$\frac{1}{\sqrt{m}} d_e(P_n, P_0) \leq \max\{|x_1^n - x_1^0|, |x_2^n - x_2^0|, |x_3^n - x_3^0|, \dots, |x_m^n - x_m^0|\} \leq d_e(P_n, P_0),$$

wnioskujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^n = x_1^0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^n = x_2^0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_3^n = x_3^0, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^n = x_m^0.$$

” \Leftarrow ”

Niech

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_1^n = x_1^0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_2^n = x_2^0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_3^n = x_3^0, \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} x_m^n = x_m^0.$$

$$\text{Ponieważ } 0 \leq d_e(P_n, P_0) \leq |x_1^n - x_1^0| + |x_2^n - x_2^0| + |x_3^n - x_3^0| + \dots + |x_m^n - x_m^0|$$

wnioskujemy, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d_e(P_n, P_0) = 0.$$

Granica funkcji w punkcie

Niech $f : D \rightarrow R$, $D \subset \mathbb{R}^m$ i niech $P_0 = (x_1^0, x_2^0, x_3^0, \dots, x_m^0)$ będzie punktem skupienia dziedziny D funkcji f . Wtedy

$$\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = g \iff \bigwedge_{\{P_n\}, P_n \neq P_0} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} d_e(P_n, P_0) = 0 \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f(P_n) = g \right)$$

Przykład 3.

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{xy}, & b) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}, \\ c) \lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}, & d) \lim_{(x,y) \rightarrow (\pi,0)} \frac{\sin^2 x}{y^2}, \\ e) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} y \ln(x^2 + y^2), & f) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \\ g) \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 + y^4}{x^2 + y^2}, & \end{array}$$

a) Funkcja $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{xy}$. Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \{(x, y) : x, y \neq 0\}$, punkt $P_0 = (0, 0)$ jest punktem skupienia D , niech $P_n = (x_n, y_n)$ będzie ciągiem punktów takim, że

$$\bigwedge_n x_n, y_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

Wtedy

$$0 \leq |f(x_n, y_n)| = \left| \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \sin \left(\frac{1}{x_n y_n} \right) \right| \leq \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \rightarrow 0, \text{ gdy } n \rightarrow \infty.$$

Stąd wynika, że

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \sqrt{x^2 + y^2} \sin \frac{1}{xy} = 0.$$

b) Funkcja $f(x, y) = \frac{1 - \cos(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$. Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, punkt $P_0 = (0, 0)$ jest punktem skupienia D . Niech $P_n = (x_n, y_n)$ będzie ciągiem punktów takim, że

$$\bigwedge_n x_n^2 + y_n^2 \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

Niech $z_n = x_n^2 + y_n^2$, wtedy $f(x_n, y_n) = \frac{1 - \cos(z_n)}{z_n^2}$ i $z_n \rightarrow 0$, gdy $n \rightarrow \infty$.

Obliczenia pomocnicze:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(z)}{z^2} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos(z))'}{(z^2)'} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin(z)}{2z} = \frac{1}{2}.$$

Wniosek

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(z_n)}{z_n^2} = \frac{1}{2}.$$

- c) Funkcja $f(x, y) = \frac{x+y-2}{x^2+y^2-2}$. Dziedziną funkcji jest zbiór $D = \{(x, y) : x^2 + y^2 \neq 2\}$, punkt $P_0 = (1, 1)$ jest punktem skupienia D .
Rozważamy ciągi punktów:
1. Niech $P_n = (1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$. Wtedy $f(P_n) = \frac{2/n}{4/n+2/n^2} \rightarrow \frac{1}{2}$
 2. Niech $Q_n = (1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n})$. Wtedy $f(Q_n) = 0$.
- Wnioskujemy, że granica nie istnieje.