Zagadnienia omawiane na wykładzie w dn. 17.03.26

Krzywe w przestrzeni $\mathbb{R}^m$: odwzorowanie $\gamma : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^m$,
$\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_m(t))$, $t \in [\alpha, \beta]$.

Będziemy zakładać, że:

1. funkcje $x_k(t)$, $t \in [\alpha, \beta]$ i ich pochodne $x'_k(t)$ $k = 1, 2, \ldots, m$ są ciągłe,
2. $x'_1(t)^2 + x'_2(t)^2 + \cdots + x'_m(t)^2 \neq 0$ dla $t \in (\alpha, \beta)$

Przykład 1. Obraz krzywej

$$x(t) = r\cos(t),\ y(t) = r\sin(t),\ t \in [0, 2\pi].$$

jest okręgiem na płaszczyźnie o środku w $(0, 0)$ i promieniu $r > 0$.

Przykład 2. Obraz krzywej

$$x(t) = r\cos(t),\ y(t) = r\sin(t),\ z = t,\ t \in [0, 2\pi].$$

jest linią śrubową w przestrzeni $\mathbb{R}^3$.

Wektor styczny do krzywej $\gamma(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t), \ldots, x_m(t))$:

$$\vec{v} = [x'_1(t), x'_2(t), x'_3(t), \ldots, x'_m(t)].$$

Przykład 3. Krzywe na powierzchni $z = f(x, y)$:

$$\gamma :\ x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) = f(x(t), y(t)),\ t \in [\alpha, \beta].$$

Wektor styczny (jeżeli funkcja f jest wystarczająco regularna):

$$\vec{v} = [x'(t), y'(t), z'(t)],\ t \in (\alpha, \beta)$$

$$z'(t) = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = f_x(x(t), y(t))x'(t) + f_y(x(t), y(t))y'(t)$$

$$\vec{v} = x'(t)[1, 0, f_x(x(t), y(t))] + y'(t)[0, 1, f_y(x(t), y(t))],\ t \in (\alpha, \beta)$$

Wektor $\vec{v}$ styczny do krzywej na powierzchni $z = f(x, y)$ jest wektorem stycznym do powierzchni.

Przykład 4. Dwa wyróżnione wektory styczne do powierzchni;

1. $[1, 0, f_x(x(t_0), y(t_0))]$: Rozpatrzmy krzywą
$\gamma :\ x(t) = x(t_0) + (t - t_0),\ y(t) = y(t_0),\ z(t) = f(x(t), y(t))$.

Wektor styczny w $t = t_0$: $\vec{v} = [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] = [1, 0, f_x(x(t_0), y(t_0))]$

2. $[0, 1, f_y(x(t_0), y(t_0))]$: Rozpatrzmy krzywą
$\gamma:\ x(t) = x(t_0),\ y(t) = y(t_0) + (t - t_0),\ z(t) = f(x(t), y(t))$.
Wektor styczny w $t = t_0$: $\vec{v} = [x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0)] = [0, 1, f_y(x(t_0), y(t_0))]$

wektor normalny $\vec{n}(x_0, y_0, z_0)$ do powierzchni $z = f(x, y)$: Wyznaczymy go jako iloczyn wektorowy podstawowych wektorów stycznych do powierzchni:

$$\vec{n}(x_0, y_0, z_0) = [1, 0, f_x(x_0, y_0)] \times [0, 1, f_y(x_0, y_0)]$$

Obliczenia

$$\vec{n}(x_0, y_0, z_0) = (\vec{i} + f_x(x_0, y_0)\vec{k}) \times (\vec{j} + f_y(x_0, y_0)\vec{k}) =$$
$$(\vec{i} \times \vec{j}) + f_x(x_0, y_0)(\vec{k} \times \vec{j}) + f_y(x_0, y_0)(\vec{i} \times \vec{k}) =$$
$$\vec{k} - f_x(x_0, y_0)\vec{i} - f_y(x_0, y_0)\vec{j} = [-f_x(x_0, y_0), -f_y(x_0, y_0), 1].$$

Wzór Taylora

Niech

$$x = x_0 + \Delta x,\ y = y_0 + \Delta y$$
$$g(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y),\ t \in [0, 1]$$

Stosujemy wzór Taylora do funkcji jednej zmiennej $g(t)$ w $t = 0$:

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{1!}g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}g^{(n)}(c),$$

dla pewnego $c \in (0, 1)$.

Określamy różniczki wyższego rzędu

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\Delta y =$$
$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^1 f(x_0,y_0)$$

$$d^2f(x_0,y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0)\Delta x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(x_0,y_0)\Delta x\Delta y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0)\Delta y^2 =$$
$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0,y_0)$$

$$\ldots$$
$$d^{n-1}f(x_0,y_0) = \sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x^{n-1-k}\partial y^k}(x_0,y_0)\Delta x^{n-1-k}\Delta y^k =$$
$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n-1} f(x_0,y_0)$$

$$d^n f(x_c,y_c) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_c,y_c)\Delta x^{n-k}\Delta y^k =$$
$$\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_c,y_c).$$

Zauważamy, że

$$g(0) = f(x_0,y_0),\ g(1) = f(x,y)$$
$$g'(0) = df(x_0,y_0),\ g''(0) = d^2f(x_0,y_0),\ g'''(0) = d^3f(x_0,y_0),\ \ldots,$$
$$g^{(n-1)}(0) = d^{n-1}f(x_0,y_0),\ g^{(n)}(c) = d^n f(x_c,y_c),$$
$$\text{gdzie } x_c = x_0 + c\Delta x,\ y_c = y_0 + c\Delta y.$$

Stąd otrzymujemy wzór Taylora:

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \frac{1}{3!}d^3f(x_0,y_0) + \cdots +$$
$$\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,y_0) + \frac{1}{n!}d^n f(x_c,y_c)$$

Badanie różnicy

$$f(x,y) - (f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \frac{1}{3!}d^3f(x_0,y_0) + \dots +$$
$$\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,y_0)) = \frac{1}{n!}d^nf(x_c,y_c)$$

$$\left|\frac{d^nf(x_c,y_c)}{(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^{n-1}}\right| = \frac{1}{(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})^{n-1}}\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_c,y_c)\Delta x^{n-k}\Delta y^k\right| =$$
$$\left|\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\partial^n f}{\partial x^{n-k}\partial y^k}(x_c,y_c)\left(\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)^{n-k}\left(\frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}\right)^k\right| \leq$$

$$2^nM\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \to 0, \text{ gdy } \sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2} \to 0,$$

gdzie

$$M = \max_{0\leq k\leq l\leq n}\left\{|f(x,y)|, \left|\frac{\partial^l f}{\partial x^{l-k}\partial y^k}\right|\right\}$$

jest wyznaczone w pewnym otoczeniu punktu (x_0,y_0).
Podsumowanie, różnica

$$\frac{1}{n!}d^nf(x_c,y_c) = f(x,y) - (f(x_0,y_0) + \frac{1}{1!}df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0) + \frac{1}{3!}d^3f(x_0,y_0) + \dots +$$
$$\frac{1}{(n-1)!}d^{n-1}f(x_0,y_0))$$

spełnia warunek

$$\boxed{\lim_{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\to 0}\frac{\frac{1}{n!}d^nf(x_c,y_c)}{\left(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}\right)^{n-1}} = 0}$$

Uwaga. Wzór Taylora dla funkcji $w = f(x_1,x_2,\dots,x_m)$.
Niech

$$\bar{x} = (x_1,x_2,\dots,x_m),\ \bar{x}_0 = (x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0),\ \ \Delta\bar{x} = (\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_m)$$

Wtedy

$$(x_1,x_2,\dots,x_m) = (x_1^0,x_2^0,\dots,x_m^0) + (\Delta x_1,\Delta x_2,\dots,\Delta x_m)$$

lub w skrócie

$$\bar{x} = \bar{x}_0 + \Delta\bar{x}$$

Określamy

$$g(t) = f(\bar{x}_0 + t \cdot \Delta\bar{x}),\ t \in [0,1]$$

Ze wzoru Taylora otrzymujemy

$$g(1) = g(0) + \frac{1}{1!}g'(0) + \frac{1}{2!}g''(0) + \frac{1}{3!}g'''(0) + \cdots + \frac{1}{(n-1)!}g^{(n-1)}(0) + \frac{1}{n!}g^{(n)}(c),$$

dla pewnego $c \in (0,1)$, przy czym

Określamy różniczki wyższego rzędu

$$df(\bar{x}_0) = \sum_{r=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_r}(\bar{x}_0)\,\Delta x_r =$$
$$\left(\sum_{r=1}^{m} \Delta x_r\,\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^1 f(\bar{x}_0)$$

$$d^2 f(\bar{x}_0) = \sum_{1\le r,s\le m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_r \partial x_s}(\bar{x}_0)\Delta x_r\,\Delta x_s =$$
$$\left(\sum_{r=1}^{m} \Delta x_r\,\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^2 f(\bar{x}_0)$$

$$\ldots$$

$$d^{n-1} f(\bar{x}_0) = \sum_{1\le r_1,r_2,\ldots,r_{n-1}\le m} \frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{r_1}\partial x_{r_2}\ldots\partial x_{r_{n-1}}}(\bar{x}_0)\,\Delta x_{r_1}\Delta x_{r_2}\ldots\Delta x_{r_{n-1}} =$$
$$\left(\sum_{r=1}^{m} \Delta x_r\,\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^{n-1} f(\bar{x}_0)$$

$$d^n f(\bar{x}_c) = \sum_{1\le r_1,r_2,\ldots,r_n\le m} \frac{\partial^n f}{\partial x_{r_1}\partial x_{r_2}\ldots\partial x_{r_n}}(\bar{x}_c)\,\Delta x_{r_1}\Delta x_{r_2}\ldots\Delta x_{r_n}$$
$$\left(\sum_{r=1}^{m} \Delta x_r\,\frac{\partial}{\partial x_r}\right)^n f(\bar{x}_c).$$

Przykład 5. Niech $m = 3$, $\bar{x}_0 = (x_0, y_0, z_0), \bar{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Różniczki rzędu $1, 2$ i 3

$$df(\bar{x}_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}_0)\,\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(\bar{x}_0)\,\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}(\bar{x}_0)\,\Delta z$$

$$d^2 f(\bar{x}_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\bar{x}_0)\,\Delta x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\bar{x}_0)\,\Delta y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(\bar{x}_0)\,\Delta z^2 +$$
$$2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\bar{x}_0)\,\Delta x \Delta y + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(\bar{x}_0)\,\Delta x \Delta z + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(\bar{x}_0)\,\Delta y \Delta z$$

$$d^3 f(\bar{x}_0) = \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(\bar{x}_0)\,\Delta x^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(\bar{x}_0)\,\Delta y^3 + \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(\bar{x}_0)\,\Delta z^3 +$$
$$3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(\bar{x}_0)\,\Delta x^2 \Delta y + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(\bar{x}_0)\,\Delta x \Delta y^2 +$$
$$3\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(\bar{x}_0)\,\Delta x^2 \Delta z + 3\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial z^2}(\bar{x}_0)\,\Delta x \Delta z^2 +$$
$$3\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(\bar{x}_0)\,\Delta y^2 \Delta z + 3\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z^2}(\bar{x}_0)\,\Delta y \Delta z^2 +$$
$$6\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}(\bar{x}_0)\,\Delta x \Delta y \Delta z,$$
$$\ldots$$
$$d^n f(\bar{x}_c) = \left(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z}\right)^n f \Bigg|_{x = \bar{x}_c}$$

gdzie $\bar{x}_c = \bar{x}_0 + c[\Delta x, \Delta y, \Delta z]$ dla pewnego $c \in (0, 1)$.
Podsumowanie, różnica

$$\frac{1}{n!} d^n f(\bar{x}_c) = f(\bar{x}) - (f(\bar{x}_0) + \frac{1}{1!} df(\bar{x}_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(\bar{x}_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(\bar{x}_0) + \cdots +$$
$$\frac{1}{(n-1)!} d^{n-1} f(\bar{x}_0))$$

spełnia warunek

$$\boxed{\lim_{\sqrt{\Delta x_1{}^2 + \Delta x_2{}^2 + \cdots + \Delta x_m{}^2} \to 0} \frac{\frac{1}{n!}\, d^n f(\bar{x}_c)}{\left(\sqrt{\Delta x_1{}^2 + \Delta x_2{}^2 + \cdots + \Delta x_m{}^2}\right)^{n-1}} = 0}$$

Ekstremum lokalne funkcji $z = f(x, y)$ w punkcie wewnętrznym (x_0, y_0) dziedziny funkcji.

Warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego.

Niech funkcja $f(x, y)$ ma w (x_0, y_0) ekstremum lokalne. Wtedy

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0}$$

Uzasadnienie. Rozważmy funkcję $g(x) = f(x, y_0)$ w otoczeniu punktu x_0. Funkcja $g(x)$ ma w x_0 ekstremum lokalne, więc

$$0 = g'(x_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0).$$

Podobnie uzasadniamy, że $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$.

Warunek dostateczny

Niech

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0,\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$

2. Rozważmy formę kwadratową

$$w(\Delta x, \Delta y) = f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2$$

a) Jeżeli $w(\Delta x, \Delta y)$ jest dodatnio określona, tzn. $w(\Delta x, \Delta y) > 0$ dla wszystkich $\Delta x^2 + \Delta y^2 > 0$, to funkcja $f(x, y)$ przyjmuje w (x_0, y_0) swoje minimum lokalne.

b) Jeżeli $w(\Delta x, \Delta y)$ jest ujemnie określona, tzn. $w(\Delta x, \Delta y) < 0$ dla wszystkich $\Delta x^2 + \Delta y^2 > 0$, to funkcja $f(x, y)$ przyjmuje w (x_0, y_0) swoje maximum lokalne.

c) Jeżeli $w(\Delta x, \Delta y)$ jest nieokreślona, tzn. $w(\Delta x, \Delta y)$ przyjmuje zarówno wartości dodatnie jak i ujemne, to funkcja $f(x, y)$ nie ma ekstremum lokalnego w (x_0, y_0).

Uzasadnienie Rozważmy wzór Taylora zastosowany do funkcji f:

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0) + \frac{1}{2}d^2 f(x_0, y_0) + \frac{1}{6}d^3 f(x_c, y_c).$$

Wtedy

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = \frac{1}{2}\frac{d^2 f(x_0, y_0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \frac{1}{6}\frac{d^3 f(x_c, y_c)}{\Delta x^2 + \Delta y^2}$$

Zauważamy, że

$$\frac{d^2 f(x_0, y_0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = w(u, v),$$

gdzie $u = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, $v = \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$, przy czym $u^2 + v^2 = 1$.

Przypadek 1. Forma kwadratowa $w(u, v)$ jest dodatnio określona
Ponieważ $w(u, v)$ jest funkcją ciągłą, więc na zbiorze
$S = \{(u, v) : u^2 + v^2 = 1\}$ osiąga swoją najmniejszą wartość $m > 0$, czyli

$$w(u, v) \geq m > 0$$

dla $(u, v) \in S$.
Ponieważ

$$\lim_{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} \to 0} \frac{d^3 f(x_c, y_c)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} = 0,$$

istnieje takie otoczenie $O(x_0, y_0)$, że

$$-m < \frac{d^3 f(x_c, y_c)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} < m$$

dla $(x, y) \in O(x_0, y_0)$.
Stąd

$$\frac{f(x, y) - f(x_0, y_0)}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)} = \frac{1}{2} \frac{d^2 f(x_0, y_0)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} + \frac{1}{6} \frac{d^3 f(x_c, y_c)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} >$$
$$\frac{1}{2} m - \frac{1}{6} m = \frac{1}{3} m > 0$$

dla $(x, y) \in O(x_0, y_0)$. Co oznacza, że funkcja f ma minimum lokalne w (x_0, y_0).

Przypadek 2. Forma kwadratowa $w(u, v)$ jest ujemnie określona. Osiąga ona swoją największą wartość $M < 0$ na zbiorze $S = \{(u, v) : u^2 + v^2 = 1\}$.
Istnieje takie otoczenie $O(x_0, y_0)$, że

$$M < \frac{d^3 f(x_c, y_c)}{\Delta x^2 + \Delta y^2} < -M$$

dla $(x, y) \in O(x_0, y_0)$.

Stąd

$$\frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)}{(\Delta x^2+\Delta y^2)} = \frac{1}{2}\frac{d^2f(x_0,y_0)}{\Delta x^2+\Delta y^2} + \frac{1}{6}\frac{d^3f(x_c,y_c)}{\Delta x^2+\Delta y^2} <$$
$$\frac{1}{2}M - \frac{1}{6}M = \frac{1}{3}M < 0$$

dla $(x,y) \in O(x_0,y_0)$. Co oznacza, że funkcja f ma maximum lokalne w (x_0,y_0).

Przypadek 3. Forma kwadratowa jest nieokreślona. Niech (u_1,v_1) i $(u_2,v_2) \in S$ będą

wybrane tak, że spełnione są nierówności

$$a = w(u_1,v_1) < 0 \text{ i } b = w(u_2,v_2) > 0$$

Przyjmijmy

$$\Delta x_n' = \frac{1}{n}u_1,\ \Delta y_n' = \frac{1}{n}v_1$$
$$x_n' = x_0 + \Delta x_n',\ y_n' = y_0 + \Delta y_n'$$

$$\Delta x_n'' = \frac{1}{n}u_2,\ \Delta y_n'' = \frac{1}{n}v_2$$
$$x_n'' = x_0 + \Delta x_n'',\ y_n'' = y_0 + \Delta y_n''$$

dla $n = 1,2,3,\ldots$.
Wtedy

$$\lim_{n\to\infty}(x_n', y_n') = (x_0,y_0)$$
$$\lim_{n\to\infty}(x_n'', y_n'') = (x_0,y_0).$$

$$\frac{f(x_n',y_n')-f(x_0,y_0)}{({\Delta x_n'}^2+{\Delta y_n'}^2)} = \frac{1}{2}\frac{d^2f(x_0,y_0)}{{\Delta x_n'}^2+{\Delta y_n'}^2} + \frac{1}{6}\frac{d^3f(x_c',y_c')}{{\Delta x_n'}^2+{\Delta y_n'}^2} =$$
$$\frac{1}{2}w(u_1,v_1) + \frac{1}{6}\frac{d^3f(x_c',y_c')}{{\Delta x_n'}^2+{\Delta y_n'}^2}$$

Ponieważ

$$a = w(u_1,v_1) < 0 \text{ i } \lim_{n\to\infty}\frac{d^3f(x_c',y_c')}{{\Delta x_n'}^2+{\Delta y_n'}^2} = 0$$

$$f(x_n', y_n') - f(x_0, y_0) < 0$$

dla dostatecznie dużych n. Podobnie otrzymujemy

$$f(x_n'', y_n'') - f(x_0, y_0) > 0$$

dla dostatecznie dużych n. Z powyższych nierówności wynika, że funkcja f nie ma ekstremum lokalne w (x_0, y_0).
Badanie formy kwadratowej $w(u, v) = Au^2 + 2Buv + Cv^2$. Rozważamy macierz współczynników

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}$$

Kryterium Sylvestera:
1. Jeżeli $A > 0$, $\det(M) = AC - B^2 > 0$, to forma kwadratowa $w(u, v)$ jest dodatnio określona.
2. Jeżeli $A < 0$, $\det(M) > 0$, to forma kwadratowa $w(u, v)$ jest dodatnio określona.
3. Jeżeli $\det(M) < 0$, to forma kwadratowa jest nieokreślona (przyjmuje zarówno ujemne i dodatnie wartości).
Sformułowanie warunku dostatecznego istnienia ekstremum fukcji w oparciu o kryterium sylvestera
Warunek dostateczny

Niech

1. $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0, \ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0,$

2. Rozważmy formę kwadratową

$$w(\Delta x, \Delta y) = f_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f_{xy}(x_0, y_0)\Delta x \Delta y + f_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2$$

Określamy macierz drugich pochodnych (hesjan)

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x, y) & f_{xy}(x, y) \\ f_{yx}(x, y) & f_{yy}(x, y) \end{bmatrix}$$

a) Jeżeli $f_{xx}(x_0, y_0) > 0$, $\det(H(x_0, y_0)) > 0$, to funkcja f ma minimum lokalne w (x_0, y_0).

b) Jeżeli $f_{xx}(x_0, y_0) < 0$, $\det(H(x_0, y_0)) > 0$, to funkcja f ma maximum lokalne w (x_0, y_0).

c) Jeżeli $\det(H(x_0, y_0)) < 0$, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w (x_0, y_0).

Uwaga. Warunek dostateczny istnienia ekstremum lokalnego w (x_0, y_0, z_0) dla funkcji $f(x, y, z)$ Określamy macierz drugich pochodnych (hesjan)

$$H(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) & f_{xz}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) & f_{yz}(x,y,z) \\ f_{zx}(x,y,z) & f_{zy}(x,y,z) & f_{zz}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

$$H_1(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y,z) \end{bmatrix}, \quad H_2(x,y,z) = \begin{bmatrix} f_{xx}(x,y,z) & f_{xy}(x,y,z) \\ f_{yx}(x,y,z) & f_{yy}(x,y,z) \end{bmatrix}$$

a) Jeżeli $\det(H_1(x_0, y_0, z_0)) = f_{xx}(x_0, y_0, z_0) > 0$, $\det(H_2(x_0, y_0, z_0)) > 0$ i $\det(H(x_0, y_0, z_0)) > 0$ to funkcja f ma minimum lokalne w (x_0, y_0, z_0).

b) Jeżeli $\det(H_1(x_0, y_0, z_0)) = f_{xx}(x_0, y_0, z_0) < 0$, $\det(H_2(x_0, y_0, z_0)) > 0$ i $\det(H(x_0, y_0, z_0)) < 0$ to funkcja f ma maximum lokalne w (x_0, y_0, z_0).

c) Jeżeli $\det(H_2(x_0, y_0, z_0)) < 0$, to funkcja f nie ma ekstremum lokalnego w (x_0, y_0).