

Zagadnienia omawiane na wykładzie w dn. 26.03.26

Ekstremum warunkowe. Metoda redukcji liczby argumentów.

Przykład 1. Znaleźć ekstremum lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ przy warunku $g(x, y) = x - y + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Wyrażamy y przez x : $y = x + 1$. Wten sposób zadanie sprowadza się do wyznaczenia ekstremum lokalnego funkcji

$$h(x) = f(x, x + 1) = x^2 + (x + 1)^2 = 2x^2 + 2x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Funkcja h przybiera swoje minimum lokalne $h = 1/2$ w $x_0 = -1/2$, funkcja nie ma innych ekstremów. Ostatecznie: f przyjmuje warunkowe minimum lokalne w $(x_0 = -1/2, y_0 = 1/2)$.

Przykład 2. Znaleźć ekstremum lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 - y^2$ przy warunku $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Rozwiązanie. Wyrażamy y przez x : $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$. Wten sposób zadanie sprowadza się do wyznaczenia ekstremum lokalnego funkcji

$$h(x) = f(x, \pm\sqrt{1 - x^2}) = x^2 - (1 - x^2) = 2x^2 - 1, \quad x \in [-1, 1].$$

1. Funkcja h przybiera swoje minimum lokalne $h = -1$ w $x_0 = 0$, Stąd f przyjmuje warunkowe minimum lokalne $f = -1$ w $(x_0 = 0, y_0 = 1)$ i w $(x_0 = 0, y_0 = -1)$.

2. Funkcja h przybiera swoje maksimum lokalne $h = 1$ w $x_0 = 1$ i w $x_0 = -1$, Stąd f przyjmuje warunkowe maksimum lokalne $f = 1$ w $(x_0 = 1, y_0 = 0)$ i w $(x_0 = -1, y_0 = 0)$.

Ekstremum warunkowe. Metoda mnożników Lagrange'a.

Zagadnienie. Znaleźć ekstremum lokalne funkcji $z = f(x, y)$ przy warunku $g(x, y) = 0$.

Twierdzenie 1. Niech funkcje $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1 . Oznaczmy $S = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$ i załóżmy, że $\nabla g(x_0, y_0) \neq [0, 0]$ dla pewnego $(x_0, y_0) \in S$. Jeśli $f|_S$ (co oznacza " f ograniczone do S ") ma lokalne ekstremum na S w (x_0, y_0) , to istnieje λ_0 takie, że

$$(1) \quad \nabla f(x_0, y_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

Uzasadnienie. Rozpatrzmy dowolną krzywą $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ $t \in (\alpha, \beta)$ na S taką, że $x(t_0) = x_0$ i $y(t_0) = y_0$. Wtedy:

1. $g(x(t), y(t)) = 0$ dla $t \in (\alpha, \beta)$. Stąd

$$0 = \frac{d}{dt}g(x(t), y(t)) = \frac{\partial g}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial g}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t) = \nabla g(x(t), y(t)) \cdot [x'(t), y'(t)].$$

W szczególności

$$(2) \quad \nabla g(x(t_0), y(t_0)) \cdot [x'(t_0), y'(t_0)] = \nabla g(x_0, y_0) \cdot [x'(t_0), y'(t_0)] = 0$$

Rozpatrzmy funkcję $h(t) = f(x(t), y(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$. Przyjmuje ona swoje ekstremum w $t = t_0$ (bo $f|_S$ ma ekstremum w (x_0, y_0)), stąd

$$0 = h'(t_0) = \left. \frac{d}{dt}f(x(t), y(t)) \right|_{t=t_0} =$$

$$\nabla f(x(t_0), y(t_0)) \cdot [x'(t_0), y'(t_0)] = \nabla f(x_0, y_0) \cdot [x'(t_0), y'(t_0)].$$

Czyli wektory $\nabla g(x_0, y_0) \neq [0, 0]$ i $\nabla f(x_0, y_0)$ są prostopadłe do wektora $[x'(t_0), y'(t_0)]$. W takim przypadku istnieje λ_0 takie, że spełniony jest warunek (1). Punkt (x_0, y_0) , w którym spełniony jest warunek (1) nazywany jest punktem krytycznym funkcji $f|_S$.

Podobnie dowodzimy tego twierdzenia w przypadku wyższych wymiarów, np.

Twierdzenie 2. Niech funkcje $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami klasy C^1 .

Oznaczmy $S = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$ i załóżmy, że

$\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq [0, 0, 0]$ dla pewnego $(x_0, y_0, z_0) \in S$. Jeśli $f|_S$ ma lokalne ekstremum na S w (x_0, y_0, z_0) , to istnieje λ_0 takie, że

$$(3) \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0, z_0).$$

Zastosowania twierdzenia 1 (metoda mnożników Lagrange'a) do wyznaczenia ekstremum lokalnego funkcji

$$z = f(x, y)$$

przy warunku dodatkowym

$$g(x, y) = 0$$

opierają się na spostrzeżeniu, że z twierdzenia 1 wynika, że punkt warunkowego ekstremum funkcji f jest też punktem krytycznym funkcji $f|S$.

Uzasadnienie. Konstrukcja pomocniczej funkcji Lagrange'a:

$$L(x, y, \lambda) = \lambda g(x, y) + f(x, y)$$

Znajdujemy punkty stacjonarne (x_0, y_0, λ_0) funkcji L , czyli spełniające układ równań:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x, y) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial x} = \lambda g_x(x, y) + f_x(x, y) = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = \lambda g_y(x, y) + f_y(x, y) = 0$$

Punkt stacjonarny (x_0, y_0, λ_0) funkcji L spełnia warunki

$$g(x_0, y_0) = 0, \quad \nabla f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \nabla g(x_0, y_0).$$

To oznacza, że jeżeli (x_0, y_0) jest punktem warunkowego ekstremum funkcji f , to istnieje λ_0 takie, że punkt (x_0, y_0, λ_0) jest punktem stacjonarnym funkcji Lagrange'a $L(x, y, \lambda)$.

Przykład 3. Znaleźć ekstremum lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 + y^2$ przy warunku $g(x, y) = x - y + 1 = 0$.

Rozwiązanie. Tworzymy funkcję Lagrange'a

$$L(x, y, \lambda) = \lambda(x - y + 1) + x^2 + y^2$$

i znajdujemy jej punkty stacjonarne. Układ równań dla punktów stacjonarnych

$$\begin{cases} L_\lambda = x - y + 1 = 0 \\ L_x = \lambda + 2x = 0 \\ L_y = -\lambda + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_0 = 1, \quad x_0 = -\frac{1}{2}, \quad y_0 = \frac{1}{2}.$$

W punkcie $(x_0 = -\frac{1}{2}, y_0 = \frac{1}{2})$ funkcja $f|S$ osiąga swoje minimum lokalne, przyjmuje dowolnie duże wartości, nie ma warunkowego maximum lokalnego.

Przykład 4. Znaleźć ekstremum lokalne funkcji $f(x, y) = x^2 - y^2$ przy warunku $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Rozwiązanie. Funkcja Lagrange'a

$$L(x, y, \lambda) = \lambda(x^2 + y^2 - 1) + x^2 - y^2$$

Układ równań dla punktów stacjonarnych

$$\begin{cases} L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ L_x = 2\lambda x + 2x = 0 \\ L_y = 2\lambda y - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \lambda_0 = 1, x_0 = 0, y_0 = -1, \\ \lambda_0 = 1, x_0 = 0, y_0 = 1, \\ \lambda_0 = -1, x_0 = 1, y_0 = 0, \\ \lambda_0 = -1, x_0 = -1, y_0 = 0. \end{aligned}$$

λ	x_0	y_0	$f =$
1	0	-1	-1
1	0	1	-1
-1	1	0	1
-1	-1	0	1

Zbiór $S = \{(x, y) : g(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ jest domknięty i ograniczony, więc funkcja ciągła $f|_S = x^2 - y^2|_S$ przyjmuje w nim swoją największą i najmniejszą wartość. W tych miejscach są to także ekstrema lokalne.

Dlatego analiza tabelki wykazuje, że w punktach $(x_0 = 0, y_0 = -1)$ i $(x_0 = 0, y_0 = 1)$ funkcja $f|_S$ osiąga swoje minimum lokalne $f = -1$, w punktach $(x_0 = -1, y_0 = 0)$ i $(x_0 = 1, y_0 = 0)$ funkcja $f|_S$ osiąga swoje maximum lokalne $f = 1$.

Przykład 5. Wyznacz prostopadłościan o największej objętości wśród prostopadłościanów o powierzchni całkowitej równej 10. (Zakładamy, że taki prostopadłościan istnieje.)

Niech $x, y, z > 0$ będą krawędziami prostopadłościanu. Wtedy zadanie formułujemy następująco: znaleźć maksimum warunkowe funkcji $V(x, y, z) = xyz$ przy warunku $g(x, y, z) = 2(xy + xz + yz) = 10$, $x, y, z \geq 0$.
Konstruujemy funkcję Lagrange'a

$$L(x, y, z, \lambda) = 2\lambda(xy + xz + yz - 10) + xyz$$

Wyznaczamy punkty stacjonarne funkcji L

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2(xy + xz + yz - 10) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x} = 2\lambda(y + z) + yz = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 2\lambda(x + z) + xz = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 2\lambda(x + y) + xy = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} xy + xz + yz = 5 \\ 2\lambda(y + z) + yz = 0 \\ 2\lambda(x + z) + xz = 0 \\ 2\lambda(x + y) + xy = 0 \end{cases}$$

1. Zauważmy, że $x \neq 0$ ($y \neq 0$ i $z \neq 0$). W przeciwnym przypadku $x = 0$ byłoby $V = 0$ co nie jest największą wartością, wtedy można byłoby zauważyć, że

$$\begin{cases} yz = 5 \\ 2\lambda(y + z) + yz = 0 \\ 2\lambda z = 0 \\ 2\lambda y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ yz = 5 \\ yz = 0 \end{cases}$$

sprzeczność. Eliminując λ otrzymujemy

$$\begin{cases} xy + xz + yz = 5 \\ \lambda = -\frac{yz}{2(y+z)} \\ \lambda = -\frac{xz}{2(x+z)} \\ \lambda = -\frac{xy}{2(x+y)} \end{cases} \quad \begin{cases} xy + xz + yz = 5 \\ \lambda = -\frac{yz}{2(y+z)} \\ -\frac{yz}{2(y+z)} = -\frac{xz}{2(x+z)} \\ -\frac{yz}{2(y+z)} = -\frac{xy}{2(x+y)} \end{cases} \quad \begin{cases} xy + xz + yz = 5 \\ \lambda = -\frac{yz}{2(y+z)} \\ y(x+z) = x(y+z) \\ z(x+y) = x(y+z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} xy + xz + yz = 5 \\ \lambda = -\frac{yz}{2(y+z)} \\ x = y = z \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 = 5 \\ x = y = z = \sqrt{\frac{5}{3}}, \\ \lambda = -\frac{yz}{2(y+z)} \end{cases}$$

Przykład 6. Znaleźć ekstremum warunkowe funkcji $f(x, y, z) = x + y + z$ przy warunkach $x^2 + y^2 = 2$ i $x + z = 1$.

Rozwiązanie. Konstrukcja funkcji Lagrange'a

$$L(x, y, z, \lambda, \mu) = \lambda(x^2 + y^2 - 2) + \mu(x + z - 1) + x + y + z$$

Wyznaczenie punktów stacjonarnych funkcji Lagrange'a

$$L_\lambda = 0, L_\mu = 0, L_x = 0, L_y = 0, L_z = 0$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \\ 2\lambda x + \mu + 1 = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \\ \mu + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \\ 2\lambda x = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \\ \mu = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x + z = 1 \\ x = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -\sqrt{2} \vee y = \sqrt{2} \\ z = 1 \\ x = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \\ \mu = -1 \end{cases}$$

Punkty podejrzane o ekstremum warunkowe;

x_0	y_0	z_0	$f =$
0	$-\sqrt{2}$	1	$-\sqrt{2} + 1$
0	$\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2} + 1$

Funkcja ciągła f osiąga największą i najmniejszą wartość na zbiorze domkniętym i ograniczonym $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 = 2 \wedge x + y = 1\}$. Z tabelki wynika, że f przyjmuje warunkowe minimum lokalne w punkcie $(x_0 = 0, y_0 = -\sqrt{2}, z_0 = 1)$ i przyjmuje swoje warunkowe maksimum lokalne w punkcie $(x_0 = 0, y_0 = \sqrt{2}, z_0 = 1)$.

Zastosowanie metody mnożników Lagrange'a do wyznaczania **ekstremum globalnego** funkcji $f : U \cup \partial U \rightarrow \mathbb{R}$ określonej na ograniczonym zbiorze $U \cup \partial U$, gdzie U jest ograniczonym obszarem. Załóżmy, że brzeg ∂U obszaru $U \subset \mathbb{R}^3$ jest zadany w następujący sposób: $\partial U = \{(x, y, z) : g(x, y, z) = 0\}$, przy czym $\nabla g(x, y, z) \neq [0, 0, 0]$ dla $(x, y, z) \in \partial U$. Wtedy wyznaczenie ekstremum globalnego może przebiegać następująco:

1. znaleźć punkty krytyczne funkcji f w obszarze U .
2. użyć metody Lagrange'a do wyznaczenia punktów stacjonarnych funkcji Lagrange'a skonstruowanej dla $f|_{\partial U}$.
3. Obliczyć wartości funkcji f w znalezionych punktach krytycznych i wybrać wartości ekstremalne.

Przykład 7. Znaleźć maksimum i minimum funkcji $f(x, y, z) = x + y + z$ w zbiorze $D = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$.

Rozwiązanie. Niech $U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 < 1\}$. Wtedy $D = U \cup \partial U$, gdzie $\partial U = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

1. Punkty krytyczne w U :

$$f_x = 0, f_y = 0, f_z = 0$$

Ponieważ $f_x = f_y = f_z \equiv 1$, funkcja f nie ma punktów krytycznych w U .

2. Punkty krytyczne funkcji $f|_{\partial U}$. Konstrukcja funkcji Lagrange'a

$$L(x, y, z, \lambda) = \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1) + x + y + z$$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 + z^2 - 1, L_x = 2\lambda x + 1, L_y = 2\lambda y + 1, L_z = 2\lambda z + 1$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ 2\lambda x + 1 = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \\ 2\lambda z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1 \\ x = y = z \\ 2\lambda x + 1 = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \\ 2\lambda z + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x^2 = 1 \\ x = y = z \\ 2\lambda x + 1 = 0 \\ 2\lambda y + 1 = 0 \\ 2\lambda z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$x_0 = y_0 = z_0 = \frac{\sqrt{3}}{3}, x_0 = y_0 = z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Funkcja f osiąga swoje minimum w $(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{\sqrt{3}}{3})$ i osiąga swoje maksimum w $(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$.

Test pochodnych drugiego rzędu dla ekstremum warunkowego.

Twierdzenie. Niech $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ będą funkcjami gładkimi (co najmniej klasy C^2). Niech $(x_0, y_0) \in U$, $g(x_0, y_0) = 0$ i niech $S = \{(x, y) : g(x, y) = 0\}$. Załóżmy, że $\nabla g(x_0, y_0) \neq [0, 0]$ i istnieje λ_0 takie, że $\nabla f(x_0, y_0) = -\lambda_0 \nabla g(x_0, y_0)$. Konstruujemy pomocniczą funkcję $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$ i brzegowy Hessian

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix}$$

1. jeżeli $\det(\overline{H}) > 0$, to w (x_0, y_0) funkcja f ma lokalne maximum warunkowe
2. jeżeli $\det(\overline{H}) < 0$, to w (x_0, y_0) funkcja f ma lokalne minimum warunkowe
3. jeżeli $\det(\overline{H}) = 0$, to w (x_0, y_0) to test nie rozstrzyga o ekstreum warunkowym

Uzasadnienie. Roważmy dowolną krzywą $(x(t), y(t))$, $t \in (\alpha, \beta)$ na S taką, że $(x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0)$. Wtedy

$$g(x(t), y(t)) = 0$$

$$0 = \frac{d}{dt}g(x(t), y(t)) = g_x \cdot x'(t) + g_y \cdot y'(t).$$

W szczególności

$$\nabla g(x_0, y_0) \cdot [x'(t_0), y'(t_0)] = 0$$

$$0 = \frac{d^2}{dt^2}g(x(t), y(t)) = g_{xx} \cdot x'(t)^2 + 2g_{xy} \cdot x'(t)y'(t) + g_{yy} \cdot y'(t)^2 +$$

$$g_x \cdot x''(t) + g_y \cdot y''(t) =$$

$$[x'(t), y'(t)] \cdot \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} + \nabla g \cdot [x''(t), y''(t)] = 0$$

Rozważmy $h(t) = f(x(t), y(t))$ dla $t \in (\alpha, \beta)$. Wtedy

$$h'(t) = f_x \cdot x'(t) + f_y \cdot y'(t),$$

$$h''(t) = f_{xx} \cdot x'(t)^2 + 2f_{xy} \cdot x'(t)y'(t) + f_{yy} \cdot y'(t)^2 + f_x \cdot x''(t) + f_y \cdot y''(t) =$$

$$[x'(t), y'(t)] \cdot \begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{bmatrix} + \nabla f \cdot [x''(t), y''(t)]$$

Funkcja $h(t)$ ma ekstremum lokalne w t_0 , stąd

$$h'(t_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot [x'(t_0), y'(t_0)] = 0.$$

Zauważamy, że

$$\begin{aligned}
 h''(t_0) &= h''(t_0) + \lambda_0 \frac{d^2}{dt^2} g(x(t), y(t)) \Big|_{t=t_0} = \\
 & [x'(t_0), y'(t_0)] \cdot \left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} + \lambda_0 \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix} + \\
 & \underbrace{(\nabla f(x_0, y_0) + \lambda_0 \nabla g(x_0, y_0))}_{=0} \cdot [x''(t_0), y''(t_0)] = \\
 & [x'(t_0), y'(t_0)] \cdot \left(\begin{bmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{bmatrix} + \lambda_0 \begin{bmatrix} g_{xx} & g_{xy} \\ g_{xy} & g_{yy} \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix} = \\
 & [x'(t_0), y'(t_0)] \cdot \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Ponieważ

$$\nabla g(x_0, y_0) \cdot [x'(t_0), y'(t_0)] = 0 \text{ i } \nabla g(x_0, y_0) \cdot [-g_y(x_0, y_0), g_x(x_0, y_0)] = 0,$$

możemy założyć, że

$$[x'(t_0), y'(t_0)] = [-g_y(x_0, y_0), g_x(x_0, y_0)].$$

W ten sposób

$$\begin{aligned}
 h''(t_0) &= \\
 [-g_y, g_x] \cdot \begin{bmatrix} L_{xx} & L_{xy} \\ L_{xy} & L_{yy} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -g_y \\ g_x \end{bmatrix} &= -\det \bar{H}
 \end{aligned}$$

(Ostatnią równość sprawdzamy rozwijając lewą i prawą stronę równości.)
W ten sposób badamy znak $h''(t_0)$ i w konsekwencji otrzymujemy warunki istnienia ekstremum funkcji $h(t)$.

Przykład 8. Znajdź punkty ekstremalne funkcji $f(x, y) = (x - y)^3$ przy warunku $x^2 + y^2 = 1$.

Konstruujemy funkcję Lagrange'a: $L(x, y, \lambda) = \lambda(x^2 + y^2 - 1) + (x - y)^3$

$$L_\lambda = x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad L_x = 2\lambda x + 3(x - y)^2 = 0, \quad L_y = 2\lambda y - 3(x - y)^2 = 0,$$

$$\begin{cases} 2\lambda x + 3(x - y)^2 = 0 \\ 2\lambda y - 3(x - y)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda x + 3(x - y)^2 = 0 \\ 2\lambda y - 3(x - y)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ \lambda(x + y) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x - y = 0 \\ x^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} x + y = 0 \\ 2\lambda x + 3(x - y)^2 = 0 \\ 2\lambda y - 3(x - y)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x = y = \sqrt{2}/2, \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} \lambda = 0 \\ x = y \\ x = y = -\sqrt{2}/2, \end{cases}$$

$$\vee \quad \begin{cases} x = -y \\ 2\lambda x + 12x^2 = 0 \\ x = \sqrt{2}/2, y = -\sqrt{2}/2 \quad \vee \quad x = -\sqrt{2}/2, y = \sqrt{2}/2 \end{cases}$$

x_0	y_0	$f =$
$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	0
$-\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	0
$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	$-2\sqrt{2}$
$\sqrt{2}/2$	$-\sqrt{2}/2$	$2\sqrt{2}$

W punkcie $(x_0 = -\sqrt{2}/2, y_0 = \sqrt{2}/2)$ funkcja ma minimum warunkowe i w punkcie $(x_0 = \sqrt{2}/2, y_0 = -\sqrt{2}/2)$ funkcja ma maksimum warunkowe.