

1 Ciągi liczbowe

Zadanie 1. Dla podanych ciągów napisać wzory określające wskazane wyrazy tych ciągów:

$$\begin{array}{ll} a) & x_n = n^n, \quad x_{2n} \\ & a) \quad y_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}, \quad y_{n+1} \\ c) & a_n = \sqrt[n]{n^2 + 1}, \quad a_{n+1}; \quad d) \quad b_n = \frac{1}{(2n)!}, \quad b_{3n+2}; \end{array}$$

Zadanie 2. Na podstawie wartości kilku początkowych wyrazów podanych ciągów znaleźć ich wzory ogólne:

$$\begin{array}{ll} a) & 1, 2, 6, 24, 120, \dots; \quad b) \quad 1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \dots; \\ c) & 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \dots; \quad d) \quad 0, 1, 5, 23, 119, \dots; \end{array}$$

Zadanie 3. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone od dołu, od góry, są ograniczone:

$$\begin{array}{ll} a) & x_n = n^4 - n^2; \quad b) \quad y_n = (-1)^n n!; \\ c) & a_n = \sqrt{n+8} - \sqrt{n+3}; \quad d) \quad b_n = 2^n - 3^n; \\ e) & e_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{2}; \quad f) \quad f_n = \frac{n^n}{n!}. \end{array}$$

Zadanie 4. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić podane równości:

$$\begin{array}{ll} a) & a) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0 \quad b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}} = 2 \\ & a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{3n+1}{n+1} \right] = 2 \quad a) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1000}{n!} = 0 \end{array}$$

Uwaga. Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Zadanie 5. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć podane granice:

$$\begin{array}{ll} a) & \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[4]{n^4 + 16} - n) \quad b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2+1)n!+1}{(2n+1)(n+1)!} \\ c) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3+2n^2+1}{n-3n^3} \quad d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2+4n+1} - \sqrt{n^2+2n}) \\ e) & \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}} \quad f) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi\sqrt{n^2+1}) \end{array}$$

Zadanie 6. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć

podane granice:

$$\begin{array}{ll}
 b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^{20}+2)^3}{(n^3+1)^{20}} & c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{8^{n+1}+3}}{2^{n+1}} \\
 d) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n^3+1}}{\sqrt[3]{n^5+1}+1} & e) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+3+\dots+(2n-1)}{2+4+\dots+2n} \\
 f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{n+\sqrt{n}+1} - \sqrt{n} \right) & g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\dots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\dots+\frac{1}{3^n}} \\
 h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[4]{4^n+1}}{\sqrt[3]{8^n+1}} & i) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg(3n+1)}{\arctg(2n+1)}
 \end{array}$$

Zadanie 7. Korzystając z twierdzenia o dwóch ciągach znaleźć podane granice:

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n+5} & b) \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n \cos n - 4^n) \\
 c) \lim_{n \rightarrow \infty} (\sin n - 2)n^2 & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{n} \right)^n \left(5 - \frac{1}{n} \right)^n \right] \\
 e) \lim_{n \rightarrow \infty} (n^5 - 10n^6 + 1) & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\lfloor \sqrt{1} \rfloor} + \frac{1}{\lfloor \sqrt{2} \rfloor} + \dots + \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \right) \\
 g) \lim_{n \rightarrow \infty} [3 + (-1)^n]^n & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^n+5^n}{5^n+3^n} \\
 i) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} & j) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)
 \end{array}$$

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{2n+3} & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3+\sin n} \\
 c) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+2]{3^n+4^{n+1}} & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2+1} + \frac{1}{n^2+2} + \dots + \frac{1}{n^2+n} \right) \\
 e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1+5n^2+3n^5} & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} + \frac{3}{n^3} + \frac{4}{n^4}} \\
 g) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_n(n^4+1)}{\log_n(n^2+1)} & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^4+1}} + \frac{2}{\sqrt{n^4+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{n^4+n}} \right)
 \end{array}$$

Zadanie 9. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:

$$\begin{array}{ll}
 a) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n2^n+1} & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lfloor n\pi \rfloor}{n} \\
 c) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+(-1)^n}{3n+2} & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}} \\
 e) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{2n+3} & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{3+\sin n}
 \end{array}$$

Zadanie 10. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

$$\begin{array}{ll}
 a) x_n = \frac{1}{n^2-6n+10} & b) y_n = \frac{4^n}{2^n+3^n} \\
 c) a_n = n^2 - 49n - 50 & d) b_n = 3^n + (-2)^n \\
 e) z_n = \operatorname{tg} \frac{100\pi}{2n+1} & f) t_n = \frac{n!}{10^n} \\
 g) c_n = \frac{n^2}{2^n} & h) d_n = \frac{5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (3+2n)}{4 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (1+3n)}
 \end{array}$$

Zadanie 11. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów:

$$a) \ x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot 2n}$$

$$b) \ y_n = \frac{n^2}{5^n}$$

$$c) \ a_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}$$

$$d) \ b_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

$$e) \ e_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) \quad f) \ f_1 = \frac{1}{2}, \ f_{n+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(f_n)^2$$

Obliczyć granice ciągów $\{t_n\}$, $\{d_n\}$, $\{b_n\}$, i $\{f_n\}$

Zadanie 12. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów:

$$a) \ z_n = \frac{1}{1 \cdot 2^1} + \frac{1}{2 \cdot 2^2} + \dots + \frac{1}{n \cdot 2^n} \quad b) \ t_1 = 2, \ t_{n+1} = \sqrt{6 + t_n}$$

$$c) \ c_n = \frac{1}{4^1+1} + \frac{1}{4^2+2!} + \dots + \frac{1}{4^n+n!} \quad d) \ d_n = \frac{(n+1)^3}{n!}$$

Obliczyć granice ciągów $\{t_n\}$, $\{d_n\}$.

Zadanie 13. Znaleźć podane granice:

$$a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n + 5} \quad b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} (3^n \cos n - 4^n)$$

$$c) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n!} \quad d) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right)$$

Zadanie 14. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej ciągu uzasadnić podane równości:

$$a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2(n+3) = \infty \quad b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 1) = \infty$$

$$c) \ \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n} - n) = -\infty \quad d) \ \lim_{n \rightarrow \infty} (10 - \sqrt[3]{n}) = -\infty$$

Zadanie 15. Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów obliczyć podane granice:

$$a) \ \lim_{n \rightarrow \infty} (n^4 - 3n^3 - 2n^2 - 1) \quad b) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - (n+1)!}{n! + 2}$$

$$c) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sqrt{3} - \cos \frac{\pi}{n}\right)^n \quad d) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg n}{\arctg \frac{n}{2}}$$

$$e) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2+1}{n} \quad f) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$$

$$g) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^n \frac{n+1}{n} \quad h) \ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\arctg \frac{2^n}{2}}{2^n}$$

Zadanie 16. Znaleźć zbiory punktów skupienia (właściwych i niewłaściwych) podanych ciągów:

$$a) \ a_n = \frac{(-1)^n n}{n+1} \quad b) \ b_n = \sin^2 \frac{n\pi}{4}$$

$$c) \ c_n = [1 + (-1)^n] \cdot 2^n \quad d) \ d_n = \left(1 + \frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$$

$$e) \ v_n = (-1)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + 4 \cdot (-1)^{\lfloor \frac{n}{3} \rfloor} \quad f^*) \ u_n = \sin n$$

Zadanie 17. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć granice:

$$\begin{array}{ll} a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+2}{5n+1} \right)^{15n} & b) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\frac{3n+2}{5n+2} \right)^n \cdot \left(\frac{5n+3}{3n+1} \right)^n \right] \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n} \right)^{(-1)^n n} & d) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2-1}{n^2} \right)^{2n^2-3} \\ e) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2}{n^2+1} \right)^{n^2} & f) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{3n+1} \right)^n \\ g) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{3n+2} \right)^{6n} & h) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \\ i) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{3n-2} & j) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+4}{n+3} \right)^{5-2n} \end{array}$$