

List 03. Funkcje - wykresy, granica, ciągłość

Zadanie 1. Pokaż, że $\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x$, $\cos(x + \frac{\pi}{2}) = -\sin x$ oraz $\operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{2}) = -\operatorname{ctg}x$.

Zadanie 2. Korzystając ze wzorów

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x \text{ oraz } \cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

wyprowadź wzory na $\sin 2x$, $\sin 3x$, $\cos 2x$, $\cos 3x$.

Zadanie 3. Narysuj, korzystając z przeglądarki Google, wykresy funkcji $f(x) = \frac{1}{2}(\cos 2x + 1)$ oraz $g(x) = \cos^2 x$. Wyjaśnij zaobserwowane zjawisko.

Zadanie 4. Naszkicuj wykresy funkcji $f_k(x) = \sqrt{1 - x^2} \cdot \sin kx$ dla $k = 1, 10, 100, 200$.

Zadanie 5. Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = |x| + \sqrt{1 - x^2} - 1$ oraz $g(x) = |x| - \sqrt{1 - x^2} - 1$.

Zadanie 6. Naszkicuj na wspólnym wykresie wykresy funkcji $f(x) = (|x| + \sqrt{1 - x^2} - 1) \cos^2 200x$ oraz $g(x) = (|x| - \sqrt{1 - x^2} - 1) \cos^2 200x$.

Zadanie 7. Niech $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4}$.

- a) Wyznacz następujące granice: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$,
b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

Zadanie 8. Niech

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

- a) Pokaż, że funkcja sign nie jest ciągła w punkcie 0.
b) Wyznacz punkty ciągłości funkcji sign .

Zadanie 9. Wyznacz punkty ciągłości następujących funkcji:

$$f_1(x) = \operatorname{sign}(\sin x), f_2(x) = \operatorname{sign}(\cos x), f_3(x) = \lfloor x \rfloor, f_4(x) = \lfloor \frac{1}{x} \rfloor.$$

Zadanie 10. Niech

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{dla } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Pokaż, że funkcja f nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Zadanie 11. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji oblicz granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}; \quad b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}; \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x).$$

Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnij równości:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x^3 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0; \quad b) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\lfloor x\sqrt{8} \rfloor}{\lfloor x\sqrt{2} \rfloor} = 2; \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2^{-x} + \sin x}{2^{-x} + \cos x}.$$

Zadanie 12. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych oblicz następujące granice:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}; \quad b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + 2^x)}{3^x} = 2; \quad c) \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{2^x - 1}{4\sqrt{x} - 1}; \quad d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \operatorname{tg}(2x))^{\operatorname{ctg} x}.$$

Zadanie 13. Znajdź wszystkie asymptoty wykresu funkcji:

$$a) y = \frac{x^3 + x^2}{x^2 - 4}; \quad b) y = \frac{x - 3}{\sqrt{x^2 - 9}}; \quad c) y = \frac{\sin^2 x}{x^3}.$$

Zadanie 14. Narysuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

$$y = \frac{x}{x-1}; \quad y = x - \lfloor x \rfloor; \quad y = x \sin \frac{1}{x}; \quad y = x^2 \sin \frac{1}{x}; \quad y = \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x};$$

oraz wyznacz ich granice w punkcie $x = 0$.

Zadanie 15. Naszkicuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

$$y = \frac{1}{x^2 - 1}, \quad y = \frac{x}{x^2 - 1}, \quad y = \frac{x^2}{x^2 - 1}, \quad y = \frac{x^3}{x^2 - 1}.$$

Zadanie 16. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła. Pokaż, że funkcja $g(x) = |f(x)|$ jest również ciągła. (Wsk: złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.)

Zadanie 17. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe. Niech $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Pokaż, że h jest funkcją ciągłą.

Zadanie 18. Oblicz granice wielomianu postaci $w(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + \dots + a_1x + a_0$ w ∞ oraz w $-\infty$. (Wsk: Rozważ oddzielnie przypadek dla n parzystego oraz n nieparzystego.)

Zadanie 19. Pokaż, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek. (Wsk: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz własności Darboux funkcji ciągłych.)

Zadanie 20. Załóżmy, że $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ jest funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $x \in [0, 1]$, że $f(x) = x$. (Wsk: Przyjrzyj się funkcji $g(x) = f(x) - x$.)