

Lista nr 4 (Pochodna funkcji)

Zadanie 1. Korzystając z definicji oblicz pochodne funkcji:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x^4, & b) f(x) = \frac{1}{x-1}, \quad (x \neq 1) \\ c) f(x) = \sqrt{x}, \quad (x > 0) & d) f(x) = \sin 2x, \quad (x \in \mathbb{R}). \end{array}$$

Zadanie 2. Badając pochodne jednostronne rozstrzygnij, czy istnieją pochodne podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = |x^2 - x|, \quad x_0 = 1, & b) f(x) = (\sin x) \cdot \operatorname{sign}(x), \quad x_0 = 0; \\ c) f(x) = \min\{x^2, 4\}, \quad x_0 = 2. & \end{array}$$

Naszkieuj wykresy tych funkcji.

Zadanie 3. Korzystając z reguł różniczkowania oblicz pochodne funkcji:

$$\begin{array}{lll} a) 3 \sin x + \cot x, & b) e^x(x^2 - x + 1) & c) \frac{x^2+2}{x-2}, \\ d) e^{-x}(3x+1)^2 & e) e^{1/x} \operatorname{arctg}(3-x), & f) \ln(x^2+1) \operatorname{tg} \sqrt{x} \\ g) \ln(\cos^2 x + 1), & h) \sqrt{\arccos(x^2)} & i) \frac{\sqrt{5}}{(x^2+1)^3}, \\ j) \frac{3^{\sin^2 x}}{2^{\cos^2 x}}. & & \end{array}$$

Zadanie 4. Napisz równania stycznych do wykresów podanych funkcji we wskazanych punktach:

$$a) f(x) = \operatorname{arctg} x, \quad (1, f(1)) \quad b) f(x) = \ln(x^2 + e), \quad (0, f(0)).$$

Zadanie 5. a) Napisz równanie stycznej do wykresu funkcji

$f(x) = x^4 - 2x + 5$, która jest równoległa do prostej $y = 2x + 3$.

b) Wyznacz styczną do wykresu funkcji $f(x) = \sqrt{x}$, która tworzy kąt $\pi/4$ z osią Ox .

c) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \ln x$, która jest prostopadła do prostej $2x + 6y - 1 = 0$.

d) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}$, w punkcie jego przecięcia z prostą $\pi x = 4y$.

e) Znajdź równanie stycznej do wykresu funkcji $f(x) = \sin 2x - \cos 3x$ w punkcie jego przecięcia z osią Oy .

Zadanie 6. Korzystając ze wzoru na pochodną funkcji odwrotnej oblicz $(f^{-1})'(y_0)$, jeżeli:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x + \ln x, \quad y_0 = e + 1, & b) f(x) = \cos x - 3x, \quad y_0 = 1 \\ c) f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x} + \sqrt[7]{x}, \quad y_0 = 1 & d) f(x) = x^3 + 3x, \quad y_0 = 4. \end{array}$$

Zadanie 7. Korzystając z reguły de l'Hospitala oblicz granice:

$$\begin{array}{lll} a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(2^x+1)}{x}, & b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+\arctg x}{x^2}, & c) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(\sin \frac{\pi}{2} x)}{\ln x}, \\ d) \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x} \arctg x, & e) \lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x, & f) \lim_{x \rightarrow \pi-} (\pi-x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \\ g) \lim_{x \rightarrow 0+} \left(\frac{1}{1-\cos x} - \frac{1}{x^2} \right), & h) \lim_{x \rightarrow 0-} \left(\frac{1}{x} - \operatorname{ctg} x \right), & i) \lim_{x \rightarrow 0+} (-\ln x)^x. \end{array}$$

Zadanie 8. Wyznacz przedziały monotoniczności funkcji:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = x^3 - 30x^2 + 225x, & b) f(x) = \sin x - \cos x, & c) f(x) = 4x + \frac{1}{x}, \\ d) f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}, & e) f(x) = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}, & f) f(x) = xe^{-3x}, \\ g) f(x) = x \ln^2 x, & h) f(x) = \frac{x}{\ln x}, & i) f(x) = 2^{x+1} - 4^x. \end{array}$$

Zadanie 9. Oblicz drugą pochodną funkcji:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = 4x^7 - 5x^3 + 2x, & b) f(x) = x^3 - \frac{2}{x}, & c) f(x) = \frac{e^x}{x}, \\ d) f(x) = \arctg x, & e) f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x, & f) f(x) = x^3 \ln x. \end{array}$$

Zadanie 10. Znajdź ekstrema lokalne funkcji:

$$\begin{array}{lll} a) f(x) = x^3 - 4x^2, & b) f(x) = \frac{2x}{x+1}, & c) f(x) = x + \frac{1}{x}, \\ d) f(x) = (x+1)e^{-x}, & e) f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}, & f) f(x) = |x^2 - 5x - 6|, \\ g) f(x) = x \ln x, & h) f(x) = \sqrt{3x - x^3}, & i) f(x) = 2\arctg x - \ln(1+x^2). \end{array}$$

Zadanie 11. Znajdź wartości najmniejsze i największe podanych funkcji na wskazanych przedziałach lub w ich dziedzinach naturalnych:

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x, [1, 5] & b) f(x) = \frac{1}{x^2-2x+2}, [-2, 2], \\ c) f(x) = \sqrt{1+x} + \sqrt{9-x}, & d) f(x) = (x-3)^2 e^{|x|}, [-1, 4], \\ e) f(x) = 1 - |9-x^2|, [-5, 1], & f) f(x) = \sin^3 x - 6 \sin x, [-\pi/2, \pi/2]. \end{array}$$

Zadanie 12. a) Prostopadłościenny kontener ma mieć pojemność 22.50 m^3 i kwadratową podłogę. Koszt 1 m^2 blachy potrzebnej do wykonania podłogi i pokrywy wynosi 20 zł , a ścian bocznych - 30 zł . Jakie powinny być wymiary kontenera, aby koszt jego budowy był najmniejszy?
b) Jaki powinien być kąt α przy wierzchołku trójkąta równoramiennego o danym polu, aby promień koła r wpisanego w ten trójkąt był największy?

Zadanie 13. Zbadaj podane funkcje i następnie sporządź ich wykresy:

$$a) f(x) = \frac{1}{x^2+1}, \quad b) f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}, \quad c) f(x) = \arcsin \frac{2x}{1+x^2}.$$