

Wykład 1. Elementy logiki i rachunku zbiorów

Język matematyki, liczby rzeczywiste

I. Rachunek zdań. Pojęcie zdania, wartości logicznych i pojęcie tautologii.

Przykłady zdań:

- p = "suma kątów w trójkącie jest równa 180° "
- q = " $2 + 2 = 5$ "
- r = " $2 + 2 = 4$ "
- s = " $2 + 2 \neq 5$ "

Operacje na zdaniach

- $\neg p$ (negacja)
- $p \vee q$ (alternatywa)
- $p \wedge q$ (koniunkcja)
- $p \rightarrow q$ (implikacja)

Wartość logiczna zdania:

zdanie prawdziwe p - wartość logiczna 1,

zdanie fałszywe p - wartość logiczna 0.

Wyznaczanie wartości logicznej zdań złożonych. Przykład dla alternatywy, koniunkcji, implikacji oraz równoważności:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Def. Tautologia: zdanie złożone, którego wartość logiczna jest równa 1 bez względu na to jakiej wartości logicznej są jego składniki, np:

- $\models \neg p \vee p$
- $\models p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (prawo eliminacji implikacji)
- $\models \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (prawo de Morgana)

- $\models \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (prawo de Morgana)
- 2. Def. Funkcją zdaniową (formułą zdaniową) na zbiorze Ω nazywamy dowolne przyporządkowanie ψ elementom zbioru Ω wartości logicznych ze zbioru $\{0, 1\}$.

Przykład

$$\psi(x) = x^2 + 5 < 8, x \in \Omega = \mathbb{R}$$

dla każdego wybranego x , $\psi(x)$ staje się zdaniem logicznym; dla jednych argumentów x jest to zdanie prawdziwe, dla innych jest to zdanie fałszywe.

Przykład

$$\psi(x, y) = x < y, x, y \in \Omega = \mathbb{R}$$

formuła zdaniowa może być funkcją jednego, dwóch lub większej liczby argumentów.

- 3. Kwantyfikatory
 - kwantyfikator ogólny: $\bigwedge_x \phi(x)$, czytamy "dla każdego x zachodzi (prawdziwe jest zdanie) $\phi(x)$ "

Przykład

$$\bigwedge_x x^2 \geq 0 \text{ - zdanie prawdziwe,}$$

$$\bigwedge_x x^2 + x \geq 0 \text{ - zdanie fałszywe, (rozpatrz np. } x = -0.5\text{)}$$

- kwantyfikator szczególny: $\bigvee_x \phi(x)$, czytamy "istnieje taki x , że zachodzi (jest prawdziwe) zdanie $\phi(x)$ "

Przykład

$$\bigwedge_x x^2 \geq 0 \text{ - zdanie prawdziwe,}$$

$$\bigwedge_x x^2 + x < -1 \text{ - zdanie fałszywe,}$$

- 4. negacja wyrażenia logicznego z kwantifikatorem

$$\neg \left(\bigwedge_x \phi(x) \right) \Leftrightarrow \bigvee_x \neg \phi(x)$$

$$\neg \left(\bigvee_x \phi(x) \right) \Leftrightarrow \bigwedge_x \neg \phi(x)$$

Przykład

$$\neg \left(\bigwedge_x x^2 + x < -1 \right) \Leftrightarrow \bigvee_x x^2 + x \geq -1 \text{ ostatnie zdanie jest prawdziwe}$$

5. zasady stosowania kwantyfikatorów w przypadku funkcji zdaniowych ϕ dwóch lub większej liczby argumentów

$$\circ \bigwedge_x \bigwedge_y \phi(x, y) \Leftrightarrow \bigwedge_y \bigwedge_x \phi(x, y)$$

$$\bigvee_x \bigvee_y \phi(x, y) \Leftrightarrow \bigvee_y \bigvee_x \phi(x, y)$$

(zmiana kolejności kwantyfikatorów tego samego rodzaju nie zmienia wartości logicznej wyniku)

- zdania $\bigwedge_x \bigvee_y \phi(x, y)$ i $\bigvee_y \bigwedge_x \phi(x, y)$ mogą mieć różne wartości logiczne
(zmiana kolejności kwantyfikatorów różnych rodzajów może zmienić wartość logiczną wyniku)

Przykład

zdanie $\bigwedge_x \bigvee_y x < y$ jest prawdziwe, a

zdanie $\bigvee_y \bigwedge_x x < y$ jest fałszywe, x, y są liczbami rzeczywistymi.

2. Oznaczenie: $\phi \equiv \psi$ oznacza równoważność ($\phi \leftrightarrow \psi$)
3. Aksjomat ekstensjonalności: zbiory A, B są równe wtedy i tylko wtedy, gdy dla dowolnego x mamy

$$\bigwedge_x [(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$$

4. Def. suma zbiorów: $(x \in A \cup B) \leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$
5. Def. iloczyn zbiorów: $(x \in A \cap B) \leftrightarrow ((x \in A) \wedge (x \in B))$
6. Def. różnica zbiorów: $(x \in A \setminus B) \leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in B))$

7. Zbiór pusty. Niech A będzie dowolnym zbiorem. Wtedy zbiór $\emptyset = A \setminus A$ zbiorem pustym. Inaczej, prawdziwe jest zdanie

$$\bigwedge_x [(x \in \emptyset) \leftrightarrow ((x \in A) \wedge \neg(x \in A))]$$

Zauważamy, że zdanie po prawej stronie znaku $\leftrightarrow$ jest zawsze fałszywe. Dlatego zdanie $x \in \emptyset$ jest fałszywe dla każdego x , w konsekwencji zdanie $x \in \emptyset$ jest też zawsze fałszywe, w takim przypadku mówimy, że zbiór pusty nie zawiera żadnego elementu.

8. Własności zbioru pustego

- $\emptyset \subset A$ dla każdego zbioru A , bo następująca implikacja

$$\bigwedge_x [(x \in \emptyset) \rightarrow (x \in A)]$$

jest prawdziwa (tu poprzednik implikacji jest zawsze zdaniem fałszywym)

- $A \cup \emptyset = A$, dla każdego zbioru A , bo dla każdego x zachodzi:

$$x \in (A \cup \emptyset) \leftrightarrow [(x \in A) \vee (x \in \emptyset)] \leftrightarrow x \in A$$

9. Tw. Istnieje dokładnie jeden zbiór pusty.

Uzasadnienie: rozważmy dwa zbiory puste $\emptyset_1$ i $\emptyset_2$, przyjmując w równości (2) wyżej $A = \emptyset_1$, $\emptyset = \emptyset_2$ otrzymujemy $\emptyset_1 \cup \emptyset_2 = \emptyset_1$, podobnie $\emptyset_2 \cup \emptyset_2 = \emptyset_2$. Stąd $\emptyset_1 = \emptyset_2$.

10. Def: Dla $A \subset \Omega$ określamy $A^c = \Omega \setminus A$ (uwaga: zawsze musimy wiedzieć do jakiego zbioru Ω dopełniamy)

11. Tw. (prawa de Morgana) Dla $A, B \subset \Omega$ mamy

$$- (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

$$- (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

12. Odpowiedniość między tautologiami a prawami rachunku zbiorów, przykłady:

$$- \models (p \vee q) \leftrightarrow (q \vee p) : A \cup B = B \cup A$$

$$- \models (p \wedge q) \leftrightarrow (q \wedge p) : A \cap B = B \cap A$$

$$- \models (p \wedge p) \leftrightarrow p : A \cap A = A$$

$$- \models ((p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)) : (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$- \models (\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)) : (A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

13. Def. Funkcją (formą) zdaniową na zbiorze Ω nazywamy dowolne przyporządkowanie ψ elementom zbioru Ω zdań o wartościach logicznych ze zbioru $\{0, 1\}$, tzn. $\psi(x)$ staje się zdaniem logicznym $\bigwedge_{x \in \Omega}$.

14. Def. (operacja wyróżniania) Funkcje zdaniowe używamy do definiowania zbiorów. Niech ϕ będzie funkcją zdaniową na zbiorze Ω . Wtedy $A = \{x \in \Omega : \phi(x)\}$ jeśli

$$x \in A \leftrightarrow [(x \in \Omega) \wedge \phi(x)].$$

Przykład: $\{x \in \mathbb{R} : 0 < x \wedge x \leq 2\} = (0, 2]$.

17. Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:

- $\neg(\bigwedge x \in \Omega)\phi(x) \equiv (\bigvee x \in \Omega)(\neg\phi(x))$
- $\neg(\bigvee x \in \Omega)\phi(x) \equiv (\bigwedge x \in \Omega)(\neg\phi(x))$