

Wykład 2. Rachunek zbiorów cd., zbiory liczbowe

Rachunek zbiorów.

Naukę o zbiorach nazywamy teorią mnogości. Metodą badania zbiorów jest metoda aksjomatyczna. Podobnie jak w geometrii nie odpowiadamy wprost na pytanie czym są punkty, proste i płaszczyzny i inne terminy "pierwotne" geometrii, lecz z pewnego układu aksjomatów (pewników) wyprowadzamy wszystkie twierdzenia geometrii bez odwoływania się do intuicyjnego znaczenia terminów pierwotnych, - tak samo i teorię mnogości opiera się na kilku podstawowych aksjomatach, z których na drodze dedukcji otrzymuje się wszystkie inne twierdzenia. W aksjomatach teorii mnogości występuje pojęcie zbioru i ściśle z nim związane pojęcie stosunku przynależności elementu do zbioru,

np. zapis $x \in A$ czytamy " x jest elementem zbioru A " lub " x należy do zbioru A ".

zapis $\neg(x \in A)$ czytamy " x nie jest elementem zbioru A " lub " x nie należy do zbioru A ", stosujemy również uproszczony zapis $x \notin A$.

Podstawowe fakty z rachunku zbiorów:

1. Aksjomat ekstensjonalności: zbiory A, B są równe ($A = B$) wtedy i tylko wtedy, gdy $\bigwedge_x [x \in A \Leftrightarrow x \in B]$
2. Suma zbiorów $A \cup B$
 $\bigwedge_x [x \in A \cup B \Leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)]$
3. Iloczyn (przekrój) zbiorów $A \cap B$
 $\bigwedge_x [x \in A \cap B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)]$
4. Różnica zbiorów $A \setminus B$
 $\bigwedge_x [x \in A \setminus B \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin B)]$
5. Dopełnienie zbioru A : $A^c = \Omega \setminus A$ (zawsze musimy wiedzieć, co jest naszą przestrzenią Ω).

Własności działań na zbiorach

1. $A \cup B = B \cup A$

2. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$
3. $A \cap B = B \cap A$
4. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
5. $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Przykład. Określenie podzbioru.

Mówimy, że zbiór A jest podzbiorem zbioru B i piszemy $A \subset B$ wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_x (x \in A \Rightarrow (x \in B))$$

Przykład. Określenie zbioru pustego.

Niech A będzie dowolnym zbiorem. Określamy zbiór pusty $\emptyset$ następująco

$$\emptyset = A \setminus A,$$

czyli

$$\bigwedge_x [x \in \emptyset \Leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \notin A)]$$

Ponieważ zdanie $(x \in A) \wedge (x \notin A)$ jest zawsze fałszywe, również zawsze fałszywym jest zdanie $x \in \emptyset$, co oznacza, że żaden x nie jest elementem zbioru pustego.

Twierdzenie 1. Istnieje dokładnie jeden zbiór pusty $\emptyset$.

Dowód. Niech A i B będą dowolnie wybranymi zbiorami. Stosując konstrukcję zbioru pustego otrzymujemy

$$\emptyset_1 = A \setminus A, \quad \emptyset_2 = B \setminus B.$$

Ponieważ zawsze fałszywymi są zdania $x \in \emptyset_1$ i $x \in \emptyset_2$, prawdziwą jest równoważność

$$\bigwedge_x (x \in \emptyset_1) \Leftrightarrow (x \in \emptyset_2),$$

co na podstawie aksjomatu ekstencjonalności oznacza, że

$$\emptyset_1 = \emptyset_2.$$

Podstawowy sposób określenia zbioru:

$$A = \{x \in \Omega : \phi(x)\}$$

czytamy następująco: A jest zbiorem tych elementów x (zawsze musimy wiedzieć, co jest naszą przestrzenią Ω), dla których funkcja zdaniowa $\phi(x)$ staje się zdaniem prawdziwym.

Przykład.

przedział $(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}$.

Przykład.

zbiór $A = \{x, y \in \mathbb{R} : 0 < y < -x^2 + 4, \quad -2 < x < 2\}$.

Zbiór liczb rzeczywistych

Działania arytmetyczne: $+$, $-$, $:$, relacja porządku $<$. Własności (aksjomaty) działań arytmetycznych i relacji porządku:

1. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})(x + y) + z = x + (y + z)$ (łączność dodawania)
2. $(\bigvee 0 \in \mathbb{R})(\bigwedge x \in \mathbb{R})(x + 0 = x)$ (element neutralny dodawania (zero))
3. $(\bigwedge x \in \mathbb{R})(\bigvee -x \in \mathbb{R})x + (-x) = 0$ (element przeciwny dodawania)
4. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})x + y = y + x$ (przemienność dodawania)
5. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ (łączność mnożenia)
6. $(\bigvee 1 \in \mathbb{R})(\bigwedge x \in \mathbb{R})(x \cdot 1 = x)$ (element neutralny mnożenia (jedność))
7. $(\bigwedge x \neq 0 \in \mathbb{R})(\bigvee x^{-1} \in \mathbb{R})x \cdot x^{-1} = 1$ (element odwrotny mnożenia)
8. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})x \cdot y = y \cdot x$ (przemienność mnożenia)
9. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ (rozdzielność mnożenia względem dodawania)
10. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$ i $y < z$, to $x < z$)
11. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})(x < y$ albo $x = y$ albo $y < x)$
12. $(\bigwedge x, y, z \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$, to $x + z < y + z$)
13. $(\bigwedge x, y \in \mathbb{R})(\bigwedge z > 0 \in \mathbb{R})$ (jeśli $x < y$, to $x \cdot z < y \cdot z$)

14. Zasada Zupełności: Każdy ograniczony, niepusty podzbiór $\mathbb{R}$ ma supremum (wyjaśnienie dalej).

Uzupełnienia

- Zbiór liczb rzeczywistych rozszerzony: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. Własności symboli $-\infty$ i ∞ .

- $(\bigwedge x \in \mathbb{R}) -\infty < x < \infty$

- Działanie dodawania

+	$-\infty$	$x \in \mathbb{R}$	∞
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	nieokreślone
$y \in \mathbb{R}$	$-\infty$	$x + y$	∞
∞	nieokreślone	∞	∞

- Działanie mnożenia

$\cdot$	$-\infty$	$x < 0$	$x = 0$	$x > 0$	∞
$-\infty$	∞	∞	nieokreślone	$-\infty$	$-\infty$
$y < 0$	∞	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$-\infty$
$y = 0$	nieokreślone	0	0	0	nieokreślone
$y > 0$	$-\infty$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	$x \cdot y$	∞
∞	$-\infty$	$-\infty$	nieokreślone	∞	∞

- Podstawowe własności:

- $(x + y)^2 = x^2 + 2 \cdot x \cdot y + y^2$,
- $(x + y)(x - y) = x^2 - y^2$,
- $(x + y)^3 = x^3 + 3 \cdot x^2 \cdot y + 3 \cdot x \cdot y^2 + y^3$,

- liczba $\sqrt{2}$ jest liczbą niewymierną.

Uzasadnienie. Dowód nie wprost (a. c.). Zakładamy przeciwnie, że liczba $\sqrt{2}$ jest wymierna, tzn. $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ dla pewnych liczb naturalnych p, q . Stąd wynika, że

$$2q^2 = p^2$$

Zauważmy, że w rozwinięciu liczby p na iloczyn liczb prostych musi wystąpić liczba 2 powiedzmy n razy. Stąd po prawej stronie równości liczba

2 występuje $2n$ razy, czyli parzystą liczbę razy. Natomiast po lewej stronie równości liczba 2 występuje nieparzystą liczbę razy. Uzyskana sprzeczność dowodzi, prawdziwości naszej tezy.

- Funkcja kwadratowa:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$$

- Nierówność Cauchy'ego (-Schwarza-Buniakowskiego): Dla dowolnych liczb rzeczywistych $a_1, a_2, \dots, a_n, b_1, b_2, \dots, b_n$ zachodzi nierówność

$$\left(\sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 \leq \sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2$$

Dowód: Rozważamy funkcję $f(x) = \sum_{k=1}^n (|a_k| - |b_k| \cdot x)^2$. Zauważamy, że jest to funkcja kwadratowa ze współczynnikami: $a = \sum_{k=1}^n b_k^2$, $b = -2 \sum_{k=1}^n |a_k b_k|$ i $c = \sum_{k=1}^n a_k^2$, która przyjmuje tylko wartości nieujemne, $(\forall x)(f(x) \geq 0)$. Stąd wnioskujemy, że wyróżnik $\Delta = b^2 - 4ac \leq 0$, wyliczamy Δ , upraszczamy i otrzymujemy żadaną nierówność.

Uwaga. Równość w powyższej nierówności ma miejsce wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $\lambda \in \mathbb{R}$ takie, że $|a_i| = \lambda |b_i|$ dla $i = 1, 2, 3, \dots, n$. Dla uzasadnienia zauważmy, że równość w nierówności Cauchy'ego oznacza, że $\Delta = 0$, czyli funkcja kwadratowa $f(x)$ ma miejsce zerowe λ , $f(\lambda) = 0$. To z kolei oznacza, że każdy składnik sumy $|a_i| - \lambda |b_i| = 0$, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, co należało udowodnić.

- Nierówność Bernoulliego

$$\bigwedge_{x \geq -1} (1+x)^n \geq 1+nx.$$

Dowód indukcyjny.

- sprawdzamy nierówność dla $n = 1$:
 $L = (1+x)^1 = 1+x$, $P = 1+1 \cdot x = 1+x$, czyli $L = P$,
- zakładamy, że nierówność jest prawdziwa dla n ,
dowodzimy, że jest także prawdziwa dla $n+1$:

$$L = (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \stackrel{1}{\geq} (1+nx)(1+x) = \\ 1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x = P,$$

w nierówności $\stackrel{1}{\geq}$ wykorzystaliśmy fakt, że $1+x \geq 0$. Na mocy zasady indukcji nierówność Bernoulliego jest prawdziwa dla wszystkich n .