

### Wykład 3. Kresy zbiorów. Ciągi liczbowe.

Uzupełnienia:

#### 1. Wartość bezwzględna

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{jeśli } a \geq 0 \\ -a, & \text{jeśli } a < 0. \end{cases}$$

Własności

- Jeśli  $a \leq |b|$  i  $-a \leq |b|$ , to  $|a| \leq |b|$ .  
 Uzasadnienie a. przypadek  $a \geq 0$ :  $|a| = a \leq |b|$   
 b. przypadek  $a < 0$ :  $|a| = -a \leq |b|$   
 w obu przypadkach żądana nierówność jest prawdziwa.

- $\bigwedge_{x,y} |x+y| \leq |x| + |y|$

Uzasadnienie

$$\begin{array}{lcl} x \leq |x|, y \leq |y| & -x \leq |x|, -y \leq |y| & \\ \hline x+y \leq |x| + |y| & -(x+y) \leq |x| + |y| & \\ \hline |x+y| \leq |x| + |y| & & \end{array}$$

- $\bigwedge_{x,y} ||x| - |y|| \leq |x - y|$

Uzasadnienie

$$\begin{array}{lcl} |x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y|, & \text{zamiana } x \text{ na } y & \\ |x| - |y| \leq |x - y| & |y| - |x| \leq |x - y| & \\ \hline ||x| - |y|| \leq |x - y| & & \end{array}$$

#### 2. Kresy zbiorów.

Niech  $\emptyset \neq A$ , będzie ograniczony. Określamy

- zbiór liczb  $\check{a}$  ograniczających zbiór  $A$  od dołu:  $\check{A} = \{\check{a} : \bigwedge_a a \in A \rightarrow \check{a} \leq a\} \cup \{-\infty\}$
- zbiór liczb  $\hat{a}$  ograniczających zbiór  $A$  od dołu:  $\hat{A} = \{\hat{a} : \bigwedge_a a \in A \rightarrow a \leq \hat{a}\} \cup \{\infty\}$

Z Zasady zupełności wynika, że w zbiorze  $\check{A}$  jest element największy  $\max \check{A} \in \check{A}$ , a w zbiorze  $\hat{A}$  jest element najmniejszy  $\min \hat{A} \in \hat{A}$ . Te liczby służą do określenia kresów zbioru  $A$ :

- kres dolny:  $\inf A = \max \check{A}$
- kres górny:  $\sup A = \min \hat{A}$ .

Z określenia kresów wynika, że

- $\bigwedge_{a \in A} \inf A \leq a \leq \sup A$

### Przykład

Niech  $A = [0, 2]$ . Wtedy

$$\check{A} = (-\infty, 0] \cup \{-\infty\}, \quad \hat{A} = [2, \infty) \cup \{\infty\}$$

$$\max \check{A} = \inf A = 0, \quad \min \hat{A} = \sup A = 2.$$

### Przykład

Niech  $A = (0, 2)$ . Wtedy

$$\check{A} = (-\infty, 0] \cup \{-\infty\}, \quad \hat{A} = [2, \infty) \cup \{\infty\}$$

$$\max \check{A} = \inf A = 0, \quad \min \hat{A} = \sup A = 2.$$

### Przykład

Zbiór liczb naturalnych  $\mathbb{N}$  jest nieograniczony od góry ( $\hat{\mathbb{N}} = \{\infty\}$  i  $\sup \mathbb{N} = \infty$ ).

Uzasadnienie

Dowód nie wprost (a.c.), zakładamy przeciwnie, że zbiór  $\mathbb{N}$  jest ograniczony od góry. Niech  $c = \sup \mathbb{N}$ . Wtedy liczba  $c - 1$  (jako mniejsza od  $c$ ) nie jest liczbą ograniczającą zbiór  $\mathbb{N}$  od góry, więc istnieje liczba naturalna  $n_0 \in \mathbb{N}$  taka, że  $c - 1 < n_0$ . Ponieważ wtedy  $c < n_0 + 1$  i  $n_0 + 1 \in \mathbb{N}$ ,  $c$  nie jest liczbą ograniczającą zbiór  $\mathbb{N}$  od góry. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości twierdzenia.

Wniosek:  $(\bigwedge x \in \mathbb{R})(x > 0 \rightarrow (\bigvee n \in \mathbb{N})(0 < \frac{1}{n} < x))$ .

Wniosek. Niech  $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Wtedy  $\check{A} = (-\infty, 0]$  i  $\inf(A) = 0$ .

### Przykład.

Niech  $A = \{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}$ . Wtedy  $\inf A = 0$  i  $\sup A = 1$ .

Uzasadnienie.

- $\sup A$ :  $1 = 2^0 > 2^{-n}$  dla  $n \geq 1$ ;
- $\inf A$ : zaczniemy od udowodnienia indukcyjnie nierówności

$$2^{-n} < \frac{1}{n}$$

dla  $n \geq 2$ , jest to nasza teza  $T(n)$ .

$$T(2): L = 2^{-2} = \frac{1}{4}, P = \frac{1}{2}, L < P,$$

$$T(n) \rightarrow T(n+1):$$

$$L = 2^{-(n+1)} = \frac{1}{2}2^{-n} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n}, P = \frac{1}{n+1}, L < P$$

Na mocy zasady indukcji nasza teza  $T(n)$  jest prawdziwa dla każdego naturalnego  $n \geq 2$ .

Stąd  $(\bigwedge x \in \mathbb{R})(x > 0 \rightarrow (\bigvee n \in \mathbb{N})(0 < 2^{-n} < \frac{1}{n} < x))$ , co oznacza, że  $\inf(\{2^{-n} : n \in \mathbb{N}\}) = 0$ .

## Ciągi i granice

1. Ciągiem nazywamy funkcję  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ ; stosujemy oznaczenie  $a_n = f(n)$ .
2. Def. granicy ciągu:  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = g$ , jeśli

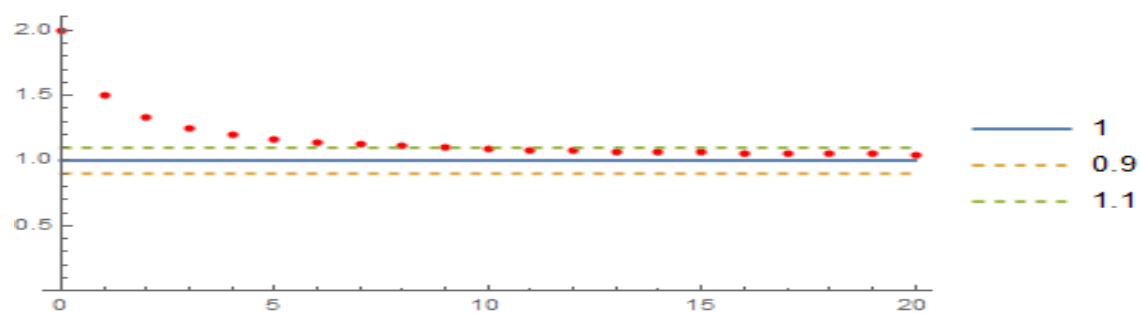
$$(L) \quad (\bigwedge \epsilon > 0)(\bigvee N \in \mathbb{N})(\bigwedge n > N)(|a_n - g| < \epsilon).$$

Mówimy, że ciąg jest zbieżny do  $g$ ; w skrócie piszemy  $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} g$

3. Przykład: Jeśli  $(\bigwedge n \in \mathbb{N})(a_n = c)$ , to  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = c$ . Uzasadnienie: rozpatrzmy dowolnie wybrany  $\epsilon > 0$ , w przedziale  $(c - \epsilon, c + \epsilon)$  są wszystkie wyrazy ciągu  $\{a_n\}$ .

4. Przykład:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ . Uzasadnienie: rozpatrzmy dowolnie wybrany  $\epsilon > 0$ , wtedy dla wszystkich naturalnych  $n$  spełniających nierówność  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , zachodzi  $\frac{1}{n+1} \in (0 - \epsilon, 0 + \epsilon)$ .

5. Przykład:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n+1}) = \dots = 1$ . Uzasadnienie: rozpatrzmy dowolnie wybrany  $\epsilon > 0$ , wtedy dla wszystkich naturalnych  $n$  spełniających nierówność  $n > \frac{1}{\epsilon}$ , zachodzi  $1 + \frac{1}{n+1} \in (1 - \epsilon, 1 + \epsilon)$ .



Rys. Ciąg  $a_n = 1 + \frac{1}{n+1}$ , granica  $g = 1$ ,  $\epsilon = 0.1$ .