

Lista zagadnień omawianych na wykładzie w dn. 13.11.2025r. :

Granica funkcji

Definicja (sąsiedztwa punktu)

1. Sąsiedztwo $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$: $S(x_0, r) = (x_0 - r, x_0 + r) \setminus \{x_0\}$
2. Sąsiedztwo lewostronne $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$:
 $S(x_0^-, r) = (x_0 - r, x_0)$
3. Sąsiedztwo prawostronne $x_0 \in \mathbb{R}$ o promieniu $r > 0$:
 $S(x_0^+, r) = (x_0, x_0 + r)$

Uwaga. Jeżeli w rozważaniach wartość $r > 0$ nie jest istotna, piszemy krótko: $S(x_0)$, $S(x_0^-)$, lub $S(x_0^+)$.

4. Sąsiedztwo $-\infty$: każdy zbiór postaci $S(-\infty) = (-\infty, b)$, $b \in \mathbb{R}$
5. Sąsiedztwo ∞ : każdy zbiór postaci $S(\infty) = (a, \infty)$, $a \in \mathbb{R}$

Niech a i A oznaczają symbole

a				
x_0	x_0^-	x_0^+	$-\infty$	∞

A		
g	$-\infty$	∞

Definicja. (granicy funkcji w punkcie w sensie Heinego)

Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na pewnym sąsiedztwie $S(a)$. Mówimy, że f ma granicę A , gdy $x \rightarrow a$, co symbolicznie zapisujemy w postaci równości $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\bigwedge_{\substack{\{x_n\} \\ \{x_n\} \subset S(a)}} \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \right) \Rightarrow \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \right) \right]$$

W przypadku

1. $a = x_0$, $A = g$ mówimy o granicy właściwej funkcji w punkcie a
2. $a = x_0^-$, $A = g$ mówimy o granicy właściwej lewostronnej funkcji w punkcie a , piszemy w skrócie $f(x_0^-)$
3. $a = x_0^+$, $A = g$ mówimy o granicy właściwej prawostronnej funkcji w punkcie a , piszemy w skrócie $f(x_0^+)$

4. $A = -\infty$ lub ∞ mówimy odpowiednio o granicy niewłaściwej
5. $a = -\infty$ lub ∞ , $A = g$ mówimy o granicy funkcji w $-\infty(\infty)$

Przykład 1.

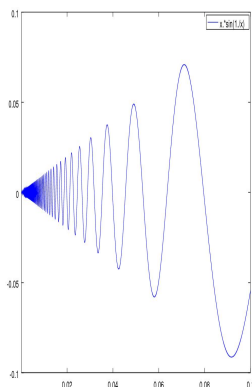
Niech

$$f(x) = \begin{cases} x \sin(\frac{1}{x}) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

Wtedy

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

Uzasadnienie. Niech $x_n \rightarrow 0$. Ponieważ $f(x_n) = x_n \sin 1/x_n$, wystarczy zauważyć, że ciąg $\sin 1/x_n$ jest ograniczony. W takim przypadku $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$, co należało udowodnić.



rys. 1. $y = x \sin 1/x$

Twierdzenie 1 (o nieistnieniu granicy funkcji w punkcie x_0) Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(x_0)$. Jeżeli istnieją ciągi $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ spełniające warunki:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = x_0$, przy czym $x'_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = x_0$, przy czym $x''_n \neq x_0$ dla każdego $n \in \mathbb{N}$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$,

to granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (właściwa ani niewłaściwa) nie istnieje.

Przykład 2.

Niech

$$f(x) = \begin{cases} \sin(\frac{1}{x}) & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0, \end{cases} \quad x_0 = 0.$$

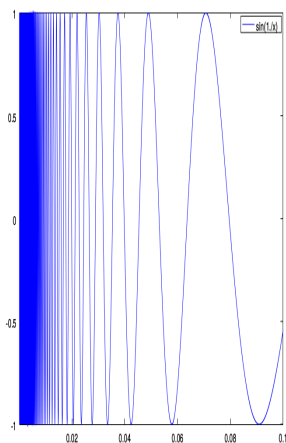
Wtedy funkcja $f(x)$ nie ma granicy, $x \rightarrow 0$.

Uzasadnienie. Rozpatrzmy dwa ciągi

1. $x_n = \frac{1}{n\pi}$;
2. $x_n = \frac{1}{2n\pi + \pi/2}$

W przypadku 1. $f(x_n) = 0$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$, więc ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do 0. W przypadku 2. $f(x_n) = 1$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$, więc ciąg $f(x_n)$ jest zbieżny do 1.

Te spostrzeżenia oznaczają, że $f(x)$ nie ma granicy, gdy $x \rightarrow 0$.



rys. 2. $y = \sin 1/x$

Twierdzenie 2 (o nieistnieniu granicy funkcji w nieskończoności) Niech funkcja f będzie określona przynajmniej na sąsiedztwie $S(\infty)$. Jeżeli istnieją ciągi $\{x'_n\}$, $\{x''_n\}$ spełniające warunki:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} x'_n = \infty$,
2. $\lim_{n \rightarrow \infty} x''_n = \infty$,
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n) \neq \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$,

to granica $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ (właściwa ani niewłaściwa) nie istnieje.

Twierdzenie 3 (warunek konieczny i wystarczający istnienia granicy)

Funkcja f ma w punkcie x_0 granicę (właściwą lub niewłaściwą) wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x).$$

wspólna wartość granic jednostronnych jest wtedy granicą funkcji.

Twierdzenie 4 (o arytmetyce granic) Jeżeli funkcje f i g mają granice właściwe w punkcie x_0 , to

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) - g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
3. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x),$
4. $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$ o ile $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0,$
5. $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)},$

Twierdzenie 5 (o granicy funkcji złożonej) Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0,$
2. $f(x) \neq y_0$ dla każdego $x \in S(x_0),$
3. $\lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = q,$

to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = q.$

Uwaga. Założenie 2. przyjęto, bo w ogólnym przypadku funkcja $g(y)$ nie musi być określona w $y_0.$

Twierdzenie 6 (o trzech funkcjach) Jeżeli funkcje f, g, h spełniają warunki:

1. $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ dla każdego $x \in S(x_0),$
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = p,$

to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = p$.

Twierdzenie 7 (o dwóch funkcjach) Jeżeli funkcje f, g spełniają warunki:

1. $f(x) \leq g(x)$ dla każdego $x \in S(x_0)$,
2. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$,

to $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Uwaga. Twierdzenie o dwóch funkcjach jest prawdziwe także dla granic jednostronnych oraz dla granic w nieskończonności. Ponadto prawdziwe są analogiczne twierdzenia dla granicy niewłaściwej funkcji równej $-\infty$.

Postępowanie z ∞

Twierdzenie 8 (o granicach niewłaściwych funkcji)

1.	$p + \infty = \infty$ dla $-\infty < p \leq \infty$	2.	$p \cdot \infty = \infty$ dla $0 < p \leq \infty$
3.	$\frac{p}{\infty} = 0$ dla $-\infty < p < \infty$	4.	$\frac{p}{0+} = \infty$ dla $0 < p \leq \infty$
5.	$p^\infty = 0$ dla $0+ \leq p < 1$	6.	$p^\infty = \infty$ dla $1 < p \leq \infty$
7.	$\infty^q = 0$ dla $-\infty \leq q < 0$	8.	$\infty^q = \infty$ dla $0 < q \leq \infty$

Uwaga. Równości podane w tabelce są symboliczną formą zapisu twierdzeń o granicy funkcji. Np. równość $p^\infty = 0$, gdzie $0+ \leq p < 1$, jest skróconą postacią twierdzenia

$$\left. \begin{array}{l} (*) \quad f(x) > 0 \text{ dla każdego } x \in S(x_0), \\ (*) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = p < 1, \\ (*) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^{g(x)} = 0.$$

Asymptoty funkcji

- asymptota pionowa: Niech $\lim_{x \rightarrow x_0-} f(x) = \infty (-\infty)$ lub $\lim_{x \rightarrow x_0+} f(x) = \infty (-\infty)$. Wtedy prostą $x = x_0$ nazywamy asymptotą pionową funkcji $f(x)$ w x_0 ;
- asymptota pozioma: Niech $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$ lub $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$, $b \in \mathbb{R}$. Wtedy prostą $y = b$ nazywamy asymptotą poziomą funkcji $f(x)$ w ∞ (lub $-\infty$);

- asymptota ukośna: Niech $a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$ i $b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax]$. Wtedy prostą $y = ax + b$ nazywamy asymptotą ukośną funkcji $f(x)$ w ∞ . Podobnie określamy asymptotę ukośną w $-\infty$.

Przykład 3. Granice podstawowych funkcji

a)	$\lim_{x \rightarrow x_0} x^a = x_0^a$, gdzie $a, x_0 > 0$
b)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$; $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$
c)	$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0}$, gdzie $a, x_0 > 0$
d)	$\lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$, gdzie $a, x_0 > 0, a \neq 1$
e)	$\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$;

Uzasadnienie.

a) Przypadek $x \rightarrow x_0+$. Metoda dowodu nie wprost (a contrario). Załóżmy, przeciwnie, że $x^a \not\rightarrow x_0^a$. Wtedy istnieje ciąg (x_n) taki, że $x_n \rightarrow x_0+$ i $x_n^a \not\rightarrow x_0^a$, gdy $n \rightarrow \infty$. Z drugiego warunku wynika, że istnieje taki $\epsilon > 0$, że nieskończenie wiele wyrazów ciągu (x_n^a) jest poza przedziałem $(x_0^a, x_0^a + \epsilon)$ inaczej, dla nieskończenie wielu n zachodzi nierówność $x_0^a < x_0^a + \epsilon < x_n^a$ lub równoważnie

$$x_0 < (x_0^a + \epsilon)^{\frac{1}{a}} < x_n$$

dla nieskończenie wielu n . Ostatnia nierówność jest sprzeczna z założeniem, że $x_n \rightarrow x_0+$. Uzyskana sprzeczność dowodzi prawdziwości naszego twierdzenia.

Przypadek $x \rightarrow x_0-$, sprowadzamy do rozpatrzonego wyżej zauważając, że wtedy $\frac{1}{x} \rightarrow \frac{1}{x_0}+$ i stąd

$$\frac{1}{x^a} = \left(\frac{1}{x}\right)^a \rightarrow \left(\frac{1}{x_0}\right)^a = \frac{1}{x_0^a},$$

czyli $x^a \rightarrow x_0^a$ również w tym przypadku.

b) Przypadek $x \rightarrow 0+$. Wykorzystamy nierówność

$$0 \leq \sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$$

dla $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Z twierdzenia o trzech funkcjach zastosowanego do nierówności $0 \leq \sin x \leq x$ wynika, że

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \sin x = 0$$

Przypadek $x \rightarrow 0-$ sprowadzamy do wcześniejszego przyjmując $y = -x$. Wtedy $\sin x = -\sin y$ i $y \rightarrow 0+$, więc

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \sin x = -\lim_{y \rightarrow 0+} \sin y = 0.$$

Dla $\cos x$ otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0+} \sqrt{1 - \sin^2 x} = 1 = \cos 0$$

Ogólny przypadek dla $\sin x$ sprowadzimy do już rozpatrzonego korzystając ze wzoru trygonometrycznego

$$\sin x = \sin[(x - x_0) + x_0] = \sin(x - x_0) \cos x_0 + \sin x_0 \cos(x - x_0)$$

Przyjmując $y = x - x_0$, otrzymujemy

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \cos x_0 \lim_{y \rightarrow 0} \sin y + \sin x_0 \lim_{y \rightarrow 0} \cos y = \sin x_0,$$

co należało udowodnić.

W przypadku funkcji $\cos x$ skorzystamy ze wzoru $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$.

c) Przypadek $a > 1$, $x \rightarrow 0+$. Pamiętamy, że

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

Niech $\epsilon > 0$ i $x_n \rightarrow 0+$, tzn.

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0, \quad x_n > 0$$

Wtedy z (1) wynika, że istnieje $n_1 > 0$ takie, że

$$(3) \quad 1 < a^{\frac{1}{n}} < 1 + \epsilon, \quad \text{dla } n \geq n_1,$$

Podobnie z (2) wynika, że istnieje $n_0 > 0$ takie, że

$$(4) \quad 0 < x_n < \frac{1}{n_1}, \quad \text{dla } n > n_0$$

Ponieważ funkcja a^x , $a > 1$ jest niemalejąca dla $x > 0$, z nierówności (3) i (4) wynika, że

$$1 < a^{x_n} < a^{\frac{1}{n_1}} < 1 + \epsilon, \text{ inaczej } |a^{x_n} - 1| < \epsilon \text{ dla } n > \max\{n_0, n_1\},$$

co oznacza, że ciąg $a^{x_n} \rightarrow 1$, dowodzi to prawdziwości tej części twierdzenia.

W przypadku ogólnym, gdy $x \rightarrow x_0+$, zauważamy na wstępie, że $a^x = a^{x_0} a^{x-x_0} = a^{x_0} a^y$, gdzie $y = x - x_0 \rightarrow 0+$. Teraz możemy skorzystać z rozpatrzonego już przypadku.

Przypadek $a > 1$, $x \rightarrow x_0-$. Zauważamy, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0-} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0-} \left(a^{x_0} \cdot \frac{1}{a^{x_0-x}} \right) = a^{x_0} \lim_{y \rightarrow 0+} \frac{1}{a^y}$$

Przypadek $0 < a < 1$, $x \rightarrow x_0$. Zauważamy, że

$$\lim_{x \rightarrow x_0} a^x = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{1}{a}\right)^x} = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x_0}} = a^{x_0}$$

d) Przypadek $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(1+x) = 0$. Udowodnimy najpierw nierówność

$$(5) \quad \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}, \text{ dla } n \in \mathbb{N}$$

Uzasadnienie. Pamiętamy, że ciąg

$$(6) \quad e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

jest niemalejący i $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$, stąd

$$1 < e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e$$

i po zlogarytmowaniu (funkcja $\ln$ jest rosnąca!) otrzymujemy

$$0 < \ln e_n < n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < 1,$$

Stąd już wynika (5).

Niech $x_n \rightarrow 0+$ i niech $\epsilon > 0$. Wtedy istnieją $n_0, n_1 \in \mathbb{N}$ takie, że

$$0 < \frac{1}{n_0} < \epsilon$$

$$0 < x_n < \frac{1}{n_0}, \text{ dla } n > n_1$$

Stąd otrzymujemy

$$0 < \ln(1 + x_n) < \ln\left(1 + \frac{1}{n_0}\right) < \frac{1}{n_0} < \epsilon, \text{ dla } n > \max\{n_0, n_1\},$$

co oznacza, że $\lim_{x \rightarrow 0+} \ln(1 + x) = 0$.

Przypadek $\lim_{x \rightarrow 0-} \ln(1 + x) = 0$. Zauważamy, że

$$\frac{1}{1+x} = 1 + \frac{-x}{1+x} = 1 + z, \text{ gdzie } z = \frac{-x}{1+x}$$

i

$$x \rightarrow 0- \Rightarrow z \rightarrow 0+.$$

W ten sposób

$$\lim_{x \rightarrow 0-} \ln(1 + x) = - \lim_{x \rightarrow 0-} \ln \frac{1}{1+x} = - \lim_{z \rightarrow 0+} \ln(1 + z) = 0.$$

Przechodzimy do uzasadnienia granic

$$(7) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0$$

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \log_a x = \log_a x_0$$

Granice (7) otrzymamy zauważając, że

$$\ln x = \ln x_0 \cdot \frac{x}{x_0} = \ln x_0 + \ln(1 + y), \text{ gdzie } y = \frac{x}{x_0} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \ln x = \ln x_0 + \lim_{y \rightarrow 0} \ln(1 + y) = \ln x_0$$

Granice (8) otrzymamy zauważając, że

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

e) Na początku rozpatrzmy przypadek $x \rightarrow 0+$. Zaczniemy od udowodnienia następującego faktu

Fakt 9. Niech m_n będzie ciągiem liczb naturalnych takim, że $\lim_{n \rightarrow \infty} m_n = \infty$. Wtedy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} = e$$

Uwaga. Podane stwierdzenie nabiera podstawowego znaczenia w sytuacji, gdy ciąg m_n nie jest podciągiem ciągu liczb naturalnych $\{n\}$. W tym drugim przypadku wystarczy powołać się na twierdzenie, że każdy podciąg ciągu zbieżnego jest zbieżny do granicy ciągu. Np. w przypadku ciągu $m_n = n^2$ wystarczy powołać się na twierdzenie o granicy podciągu, natomiast w przypadku ciągu $\{m_n\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \dots\}$, który nie jest podciągiem ciągu liczb naturalnych $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$ nie możemy się powołać na to twierdzenie.

Mamy wykazać, że zdanie

$$\bigwedge_{\epsilon > 0} \bigvee_{n_0} \bigwedge_{n > n_0} \left| \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} - e \right| < \epsilon$$

jest prawdziwe. Wcześniej był badany ciąg $e_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, dla którego otrzymaliśmy

1. ciąg e_n jest ograniczony, $1 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq 3$, $\bigwedge n \in \mathbb{N}$
2. ciąg e_n jest niemalejący, $e_n \leq e_m$, $\bigwedge n \leq m$, $n, m \in \mathbb{N}$
3. $\lim_{n \rightarrow \infty} e_n = e$

Niech $\epsilon > 0$. Wtedy istnieje n_1 takie, że dla $n > n_1$ zachodzi

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n - e \right| < \epsilon, \quad \bigwedge n \geq n_1$$

Ponieważ $m_n \rightarrow \infty$, istnieje n_0 takie, że $m_n > n_1$ dla $n > n_0$. Wtedy dla $n > n_0$ otrzymujemy

$$\left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^{n_1} \leq \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} \leq e$$

stąd

$$\left| \left(1 + \frac{1}{m_n}\right)^{m_n} - e \right| \leq \left| \left(1 + \frac{1}{n_1}\right)^{n_1} - e \right| < \epsilon, \quad \bigwedge n > \max\{n_0, n_1\},$$

co dowodzi prawdziwości naszego faktu.

Przechodzimy do dowodu właściwej granicy. Niech $x_n \rightarrow \infty$. Zachodzą nierówności

$$[x_n] \leq x_n \leq [x_n] + 1$$

dla przypomnienia, $[x_n]$ jest częścią całkowitą x . Stąd otrzymujemy oszacowania

$$\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} \leq \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} \leq \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n] + 1}$$

Dla ciągów skrajnych w tych nierównościach mamy

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n]} = \left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)^{[x_n] + 1} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{[x_n] + 1}\right)} \\ b_n &= \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n] + 1} = \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right)^{[x_n]} \cdot \left(1 + \frac{1}{[x_n]}\right) \end{aligned}$$

Do obliczenia granic ciągów a_n i b_n zastosujemy **Fakt 8** otrzymując

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = e$$

Teraz z twierdzenia o trzech ciągach wynika, że

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x_n}\right)^{x_n} = e$$

co kończy tę część dowodu.

Przypadek $x \rightarrow 0-$ sprowadzimy do już rozpatrzonego. Niech $y = -x$. Wtedy

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = (1 - y)^{-\frac{1}{y}} = \left(\frac{1}{1 - y}\right)^{\frac{1}{y}} = \left(1 + \frac{y}{1 - y}\right)^{\frac{1}{y}}$$

Przyjmujemy $z = \frac{y}{1 - y}$, $y = \frac{z}{z + 1}$, stąd

$$(1 + x)^{\frac{1}{x}} = \left[(1 + z)^{\frac{1}{z}}\right]^{z + 1}$$

Teraz wystarczy zauważyć, że jeśli $x \rightarrow 0-$, to $z \rightarrow 0+$ i skorzystać z granicy funkcji $f(z)^{g(z)}$, gdzie

$$\begin{aligned} f(z) &= (1 + z)^{\frac{1}{z}}, \quad g(z) = z + 1 \\ \lim_{z \rightarrow 0+} f(z) &= e, \quad \lim_{z \rightarrow 0+} g(z) = 1 \end{aligned}$$

Wyrażenia nieoznaczone

$$\infty - \infty \quad 0 \cdot \infty \quad \frac{0}{0} \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 1^\infty \quad \infty^0 \quad 0^0$$

Uwaga. Symbole nieoznaczone W takich przypadkach wyznaczenie granicy wymaga bardziej szczegółowych rozważań.

Przykład 4. Granice podstawowych wyrażeń nieoznaczonych

a)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1$
c)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	d)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1$
e)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x} = 1$	f)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgh} x}{x} = 1$
g)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	h)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a}$, gdzie $0 < a \neq 1$
i)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	j)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a$, gdzie $a > 0$
k)	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$	l)	$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$
m)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^a - 1}{x} = a$, gdzie $a \in \mathbb{R}$		

Uzasadnienie. Wskazówki :

Przypadek g). Zauważamy, że

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}} \rightarrow e, \text{ gdy } x \rightarrow 0$$

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \ln y$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{y \rightarrow e} \ln y = \ln e = 1.$$

Przypadek h). Zauważamy, że

$$(1+x) = a^{\log_a(1+x)},$$

$$\ln(1+x) = \ln a \cdot \log_a(1+x)$$

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{\ln(1+x)}{x}$$

Przypadek i). Przyjmujemy $y = e^x - 1$, $x = \ln(1 + y)$ i zauważamy, że

$$\begin{aligned} &\text{jeśli } x \rightarrow 0, \text{ to } y \rightarrow 0 \\ &\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y}{\ln(1 + y)} = 1 \end{aligned}$$

Przypadek j). Zauważamy, że

$$\begin{aligned} a^x &= e^{x \ln a} \\ \frac{a^x - 1}{x} &= \frac{e^y - 1}{x} = \frac{e^y - 1}{y} \cdot \ln a, \text{ gdzie } y = x \ln a \end{aligned}$$

Przypadek k). Przyjmujemy $y = \frac{1}{x}$ i zauważamy, że jeśli $x \rightarrow \pm\infty$, to $y \rightarrow 0$. W końcu

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{\frac{1}{y}} = e.$$

Przypadek l). Przyjmujemy $y = \frac{a}{x}$. Zauważamy, że

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow 0} \left[(1 + y)^{\frac{1}{y}}\right]^a = e^a.$$

Przypadek m). Przyjmujemy $y = (1 + x)^a - 1$ i zauważamy, że

$$\ln(1 + x) = \frac{1}{a} \ln(1 + y) \text{ oraz jeśli } x \rightarrow 0, \text{ to } y \rightarrow 0.$$

Dalej

$$\frac{(1 + x)^a - 1}{x} = \frac{y}{\ln(1 + x)} \cdot \frac{\ln(1 + x)}{x} = \frac{\ln(1 + x)}{x} \cdot \frac{y}{\ln(1 + y)} \cdot a$$