

Przykład 1. Korzystając z granic wyrażeń nieoznaczonych obliczyć podane granice:

$$\begin{array}{lll}
 a) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sin 5x} & b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{\sin 2x} & c) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3^x - 2^x}{x} \\
 d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+7} \right)^{x+1} & e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+5}{x^2-7} \right)^{x^2} & f) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{2x-1} \\
 g) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x^3)}{x^3} & h) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \sin 3x \operatorname{ctg} 5x & i) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{tg} \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}} \\
 j) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[6]{1+x^5}-1}{x} & k) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[7]{3-x}-1}{\sin \pi x} & l) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\pi - (1-x)^\pi}{x} \\
 m) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} & n) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)} & o) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2}
 \end{array}$$

Przypadek k). Za pomocą kolejnych podstawień $y = 3 - x$ i $y = 1 + z$ doprowadzamy do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\begin{aligned}
 \frac{\sqrt[7]{3-x}-1}{\sin \pi x} &= \frac{\sqrt[7]{y}-1}{\sin \pi(3-y)} = \\
 \frac{\sqrt[7]{y}-1}{\sin \pi y} &= \frac{(1+z)^{\frac{1}{7}}-1}{z} \cdot \frac{z}{-\sin \pi z} = \frac{(1+z)^{\frac{1}{7}}-1}{z} \cdot \frac{\pi z}{\sin \pi z} \cdot \frac{-1}{\pi}
 \end{aligned}$$

Przypadek o). Zauważamy, że $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = 1 - 2(1 - \cos^2 \frac{x}{2})$. Za pomocą kolejnych podstawień $y = 2(1 - \cos^2 \frac{x}{2}) = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ i $z = -y$ doprowadzamy do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln \cos x}{x^2} &= \frac{\ln(1-y)}{-y} \cdot \frac{-2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \\
 -2 \cdot \frac{\ln(1+z)}{z} \cdot \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{x/2} \right)^2
 \end{aligned}$$

Przypadek n). Za pomocą kolejnych podstawienia $x = \frac{\pi}{2} + y$ doprowadzamy do postaci, gdzie łatwo wyliczymy granicę

$$\begin{aligned}
 \frac{\ln(1+\cos x)}{\ln(1+\cos 3x)} &= \frac{\ln(1-\sin y)}{\ln(1+\sin 3y)} = \\
 \frac{\ln(1-\sin y)}{-\sin y} \cdot \frac{-\sin y}{\sin 3y} \cdot \frac{\sin 3y}{\ln(1+\sin 3y)} &= \\
 \frac{\ln(1-\sin y)}{-\sin y} \cdot \frac{-\sin y}{y} \cdot \frac{3y}{\sin 3y} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{\sin 3y}{\ln(1+\sin 3y)}
 \end{aligned}$$

Funkcje ciągłe

Def. (ciągłość w $a \in \mathbb{R}$) Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

Używając sformułowania Cauchy'ego pojęcia granicy, ciągłość funkcji można wyrazić następująco:

Tw. (definicja Cauchy'ego) Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a , jeśli

$$(\forall \epsilon > 0) (\forall \delta > 0) (\forall x) (|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon)$$

Używając sformułowania Heinego pojęcia granicy, ciągłość funkcji można wyrazić następująco:

Tw. (definicja Heinego) Funkcja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie a , jeśli

$$(\forall (x_n)) (\forall \delta > 0) (\forall x) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a) \right)$$

Def. (ciągłość w zbiorze $A \subseteq \mathbb{R}$). Funkcja $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w A , jeśli jest ciągła w każdym punkcie zbioru A .

Przykład 2. Funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w $[a, b]$, jeśli spełnione są następujące warunki:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &= f(x_0), \text{ dla } x_0 \in (a, b) \\ \lim_{x \rightarrow a+} f(x) &= f(a), \quad \lim_{x \rightarrow b-} f(x) = f(b) \end{aligned}$$

Podstawowe własności funkcji ciągłych

1. Suma, różnica, iloczyn oraz iloraz dwóch funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.
2. Wszystkie wielomiany są ciągłe.
3. Jeśli f jest ciągła, to również $|f|$ jest ciągła.
4. Złożenie funkcji ciągłych jest ciągłe.

Przykład 3. Funkcja charakterystyczna zbioru liczb wymiernych ($f(x) = 1$ dla $x \in \mathbb{Q}$ oraz $f(x) = 0$ dla $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$) nie jest ciągła w żadnym punkcie.

Przykład 4. Rodzaje nieciągłości funkcji w punkcie a :

1. nieciągłość typu skoku (I rodzaju) - istnieją granice jednostronne funkcji $f(x)$, przy czym

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+} f(x)$$

2. nieciągłość II rodzaju - nie istnieje co najmniej jedna granica jednostronna.

Twierdzenie. (Weierstrassa) Jeśli $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła, to istnieją $x_1, x_2 \in [a, b]$ takie, że $f(x_1) = \min\{f(x) : x \in [a, b]\}$ i $f(x_2) = \max\{f(x) : x \in [a, b]\}$, tzn. $f(x)$ przyjmuje w swojej najmniejszą i największą wartość.

Wniosek. Każda funkcja ciągła na odcinku domkniętym $[a, b]$ jest ograniczona.

Twierdzenie. (Darboux, o przyjmowaniu wartości pośredniej) Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(a) \leq y \leq f(b)$ (lub $f(b) \leq y \leq f(a)$), to istnieje $x \in [a, b]$ taki, że $y = f(x)$.

Wniosek. Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i $f(a) < 0 < f(b)$, to istnieje $c \in (a, b)$, że $f(c) = 0$.

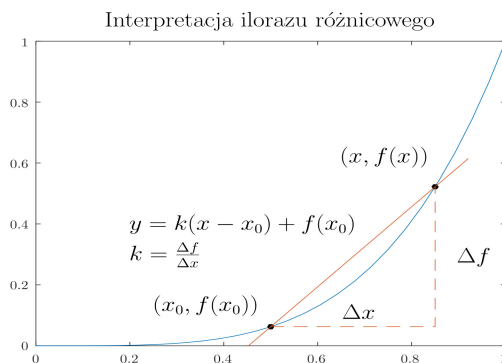
Przykład 5. Każdy wielomian $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ ma miejsce zerowe. Podobnie każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek rzeczywisty.

Twierdzenie. Jeśli funkcja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła i rosnąca (lub malejąca), to $f([a, b]) = [\alpha, \beta]$ dla pewnych α, β (tzn. obraz odcinka $[a, b]$ jest odcinkiem $[\alpha, \beta]$ oraz funkcja odwrotna $f^{-1} : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$ jest ciągła).

Pochodna funkcji

Definicja (iloraz różnicowy) Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na pewnym otoczeniu $O(x_0)$. Ilorazem różnicowym funkcji f w punkcie x_0 odpowiadającym przyrostowi $\Delta x \neq 0$ zmiennej niezależnej x nazywamy liczbę

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$



Definicja (pochodna właściwa). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na pewnym otoczeniu $O(x_0)$. Pochodną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

inaczej

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Uwaga (oznaczenia pochodnej).

$$\frac{df}{dx}(x_0), \quad Df(x_0), \quad f'(x_0), \quad \dot{f}(x_0).$$

Twierdzenia o pochodnej funkcji.

Twierdzenie (o pochodnej sumy, różnicy, iloczynu oraz ilorazu funkcji).

Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe w punkcie x_0 , to

1. $(cf)'(x_0) = cf'(x_0)$, gdzie c jest stałą;
2. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;
3. $(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;
4. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$;
5. $(f/g)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$, o ile $g(x_0) \neq 0$;

Twierdzenie (o pochodnej funkcji złożonej). Jeżeli

1. funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0 ;

2. funkcja g ma pochodną właściwą w punkcie $f(x_0)$,

to $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

Uwaga. Prawdziwy jest analogiczny wzór dla dowolnej liczby składowych funkcji oraz dla pochodnych jednostronnych, a także dla pochodnych niewłaściwych.

Przykład 6. Obliczyć pochodną funkcji $h(x) = \sin(\operatorname{tg}(\cos x))$.

$$h'(x) = (\sin)'(\operatorname{tg}(\cos x)) \cdot (\operatorname{tg})'(\cos x) \cdot (\cos x)' =$$

$$\cos(\operatorname{tg}(\cos x)) \cdot \frac{1}{\cos^2(\cos x)} \cdot (-\sin x)$$

Twierdzenie (o pochodnej funkcji odwrotnej). Jeżeli funkcja f spełnia następujące warunki

1. jest ciągła na pewnym otoczeniu $O(x_0)$,
2. jest ściśle monotoniczna na otoczeniu $O(x_0)$,
3. ma pochodną właściwą $f'(x_0) \neq 0$,

to $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$, gdzie $y_0 = f(x_0)$.

Uwaga. Wzór ten jest prawdziwy także dla pochodnych niewłaściwych i jednostronnych.

Pochodne wybranych funkcji elementarnych

$(c)' = 0$, gdzie $c \in \mathbb{R}$
$(x^n)' = nx^{n-1}$, dla $x \in \mathbb{R}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$
$(x^p)' = px^{p-1}$, dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$, gdzie $p \in \{-1, -2, -3, \dots\}$
$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, dla $x > 0$, gdzie $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$
$(\sin x)' = \cos x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\cos x)' = -\sin x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \operatorname{tg}^2 x$ dla $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi\right)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$(\operatorname{ctg} x)' = \frac{-1}{\sin^2 x} = -1 - \operatorname{ctg}^2 x$ dla $x \in (k\pi, (k+1)\pi)$, gdzie $k \in \mathbb{Z}$
$(e^x)' = e^x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(a^x)' = a^x \ln a$ dla $0 < a \neq 1$ oraz $x \in \mathbb{R}$
$(\sinh x)' = \cosh x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\cosh x)' = \sinh x$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{tgh} x)' = \frac{1}{\cosh^2 x}$ dla $x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{ctgh} x)' = \frac{-1}{\sinh^2 x}$ dla $x \in (-\infty, 0)$ lub $x \in (0, \infty)$

Pochodne ważniejszych funkcji elementarnych - c. d.

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ dla } x \in (-1, 1)$
$(\arccos x)' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ dla } x \in (-1, 1)$
$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \text{ dla } x \in \mathbb{R}$
$(\operatorname{arccotg} x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \text{ dla } x \in \mathbb{R}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \text{ dla } 0 < a \neq 1 \text{ oraz } x \in (0, \infty)$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}, \text{ dla } x \in (0, \infty)$

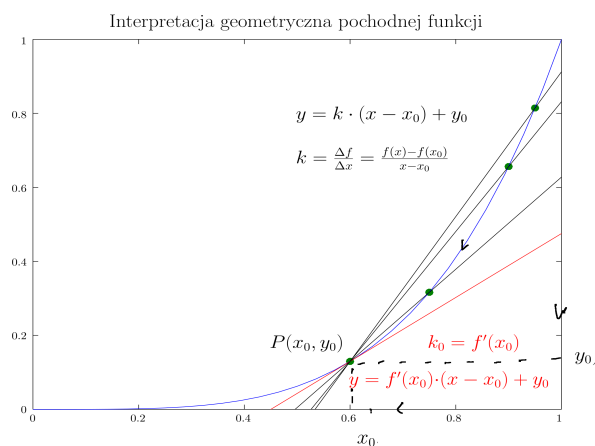
Przykład 7. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \arcsin x + \arccos \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

Przykład 8. Obliczyć pochodną funkcji $f(x) = \log_x(x^2 + 1)$

$$\begin{aligned} 1) \log_x(x^2 + 1) &= \frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln x} \\ 2) \frac{d}{dx} \ln(x^2 + 1) &= \frac{1}{\ln(x^2 + 1)} \cdot (2x) = \frac{2x}{\ln(x^2 + 1)} \\ 3) \frac{d}{dx} \frac{1}{\ln x} &= -\frac{1}{\ln^2 x} \cdot \frac{1}{x} = -\frac{1}{x \ln x} \\ f'(x) &= (\log_x(x^2 + 1))' = \left(\frac{\ln(x^2 + 1)}{\ln x} \right)' = \\ &= \left(\ln(x^2 + 1) \cdot \frac{1}{\ln x} \right)' = (\ln(x^2 + 1))' \cdot \frac{1}{\ln x} + \ln(x^2 + 1) \cdot \left(\frac{1}{\ln x} \right)' = \\ &= \frac{2x}{\ln(x^2 + 1)} \cdot \frac{1}{\ln x} + \ln(x^2 + 1) \cdot \frac{-1}{x \ln x} = \\ &= \frac{2x}{(\ln(x^2 + 1)) \ln x} - \frac{\ln(x^2 + 1)}{x \ln x} \end{aligned}$$

Definicja (styczna do wykresu funkcji). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz funkcja ciągła f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0)$. Prosta jest styczna do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$, jeżeli jest granicznym położeniem siecznych wykresu funkcji f przechodzących przez punkty $S = (x_0, f(x_0))$ i $P = (x, f(x))$, gdy $x \rightarrow x_0$.

Interpretacja geometryczna pochodnej



$$x \rightarrow x_0 (\Rightarrow f(x) \rightarrow f(x_0))$$

Fakt (równanie stycznej do wykresu funkcji). Równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$ ma postać $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Definicja (kąt przecięcia wykresów funkcji). Niech wykresy funkcji f i g mają punkt wspólny (x_0, y_0) , przy czym obie funkcje mają pochodne właściwe w punkcie x_0 . Kątem przecięcia wykresów funkcji f i g nazywamy kąt ostry ϕ między stycznymi do wykresów tych funkcji w punkcie ich przecięcia.

Fakt (o mierze kąta między wykresami funkcji). Miarę kąta przecięcia wykresów funkcji f i g można wyznaczyć ze wzoru

$$\operatorname{tg} \phi = \left| \frac{f'(x_0) - g'(x_0)}{1 + f'(x_0)g'(x_0)} \right|$$

gdzie x_0 jest rzędną punktu przecięcia wykresów. Jeżeli $f'(x_0)g'(x_0) = -1$ przyjmujemy, że $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Definicja (pochodne jednostronne funkcji). Niech $x_0 \in \mathbb{R}$ oraz niech funkcja f będzie określona przynajmniej na otoczeniu $O(x_0-)$. Pochodną lewostronną funkcji f w punkcie x_0 nazywamy granicę właściwą

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Analogicznie definiuje się pochodną prawostronną funkcji f w punkcie x_0 . Pochodną taką oznaczamy przez $f'_+(x_0)$.

Uwaga. Jeżeli funkcja ma w punkcie pochodną lewostronną (prawostronną), to jest w tym punkcie lewostronnie (prawostronnie) ciągła.

Interpretacja geometryczna pochodnych jednostronnych.

Twierdzenie (warunek konieczny i dostateczny istnienia pochodnej).

Funkcja f ma pochodną w punkcie x_0 wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0).$$

Jeżeli pochodne jednostronne są równe, to ich wspólna wartość jest pochodną.

Definicja (pochodna funkcji w przedziale, funkcja różniczkowalna).

Funkcja ma pochodną na przedziale otwartym (a, b) , jeżeli ma taką pochodną w każdym punkcie tego przedziału. Funkcja ma pochodną na przedziale domkniętym $[a, b]$, jeżeli ma taką pochodną w każdym punkcie przedziału otwartego oraz prawostronną pochodną w punkcie a i lewostronną pochodną w punkcie b . Analogicznie definiujemy pochodną funkcji na przedziałach $(a, b]$, $[a, b)$, $(-\infty, b]$, $[a, \infty)$. Funkcję określoną na przedziale, której wartości w punktach x tego przedziału są równe $f'(x)$, nazywamy pochodną funkcji f na przedziale i oznaczamy przez f' lub $\frac{df}{dx}$ albo $\dot{f}$. O funkcji, która ma pochodną właściwą w każdym punkcie przedziału, mówimy, że jest różniczkowalna.

Definicja (pochodna niewłaściwa funkcji). Niech f będzie funkcją ciągłą w punkcie $x_0 \in \mathbb{R}$. Funkcja f ma w punkcie x_0 pochodną niewłaściwą wtedy i tylko wtedy, gdy granica

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty \text{ lub } -\infty, \quad f'(x_0) = \infty \text{ (} -\infty \text{)}$$

Uwaga. W podobny sposób definiuje się pochodne niewłaściwe jednostronne. Pochodne te oznaczają się tym samym symbolem co pochodne jednostronne właściwe: np. $f'_-(x_0) = \infty$.

Twierdzenie (warunek konieczny istnienia pochodnej właściwej funkcji).

Jeżeli funkcja ma pochodną właściwą w punkcie, to jest ciągła w tym punkcie.

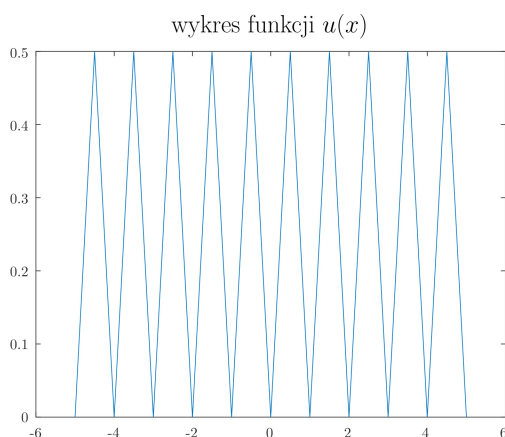
Uwaga. Implikacja odwrotna nie jest prawdziwa. Np. funkcja $f(x) = |x|$ jest ciągła w punkcie $x_0 = 0$, ale $f'(0)$ nie istnieje.

Przykład 9. (Van der Waerden). Funkcja, która nie ma pochodnej w

żadnym punkcie

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u(4^n x)}{4^n},$$

gdzie $u(x) = \min\{x - \lfloor x \rfloor, \lfloor x \rfloor + 1 - x\}$ ($\lfloor x \rfloor$ - część całkowita liczby x) oznacza odległość punktu x od najbliższej liczby całkowitej.



Uwaga. Pochodna funkcji na przedziale nie musi być ciągła. Np. funkcja

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

ma pochodną

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0 \\ 0 & \text{dla } x = 0 \end{cases}$$

Jednakże pochodna ta nie jest ciągła w punkcie 0. Można pokazać, że pochodna dowolnej funkcji może mieć jedynie nieciągłości drugiego rodzaju, jednocześnie pochodna funkcji ma własność Darboux, tzn. przyjmuje wartości pośrednie.

Definicja (różniczka funkcji) Niech funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0 . Różniczką funkcji f nazywamy funkcję df zmiennej $\Delta x = x - x_0$ określoną wzorem

$$df(x_0, \Delta x) = f'(x_0) \Delta x$$

Twierdzenie (zastosowanie różniczki do obliczeń przybliżonych). Jeżeli funkcja f ma pochodną właściwą w punkcie x_0 , to

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Przy czym błąd, jaki popełniamy zastępując przyrost funkcji

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

jej różniczką $df = f'(x_0)\Delta x$, dąży szybciej do zera niż Δx , tzn.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f - df}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} - f'(x_0) = 0.$$

Uwaga. Funkcję liniową $y = a(x - x_0) + b$, gdzie $a = f'(x_0)$, $b = f(x_0)$, nazywamy liniową aproksymacją funkcji f w otoczeniu punktu x_0 . Wykres funkcji liniowej jest styczną wykresu funkcji f w punkcie $(x_0, f(x_0))$.

Przykład 10. Za pomocą różniczki oblicz przybliżoną wartość wyrażenia

$$\text{a) } e^{-0.001}, \quad \text{b) } \frac{1}{0.9996^3}.$$

Twierdzenie (zastosowanie różniczki funkcji do szacowania błędów pomiarów). Niech wielkości fizyczne będą powiązane zależnością $y = f(x)$, przy czym pochodna $f'(x_0)$, gdzie x_0 jest wynikiem pomiaru jest właściwa. Ponadto niech Δx oznacza błąd bezwzględny pomiaru wielkości x . Wtedy błąd bezwzględny Δy obliczanej wielkości y wyraża się wzorem przybliżonym $\Delta y \approx |f'(x_0)|\Delta x$.

Pochodne wyższych rzędów

Definicja (pochodna n-tego rzędu funkcji). Pochodną n-tego rzędu funkcji f w punkcie x_0 definiujemy indukcyjnie

$$f^{(n)}(x_0) = [f^{(n-1)}]'(x_0) \text{ dla } n \geq 2,$$

gdzie $f^{(1)}(x_0) = f'(x_0)$. Ponadto przyjmujemy $f^{(0)}(x_0) = f(x_0)$. Oznaczenia $\frac{d^n f}{dx^n}$, $D^n f$, $f^{(n)}$, przy czym piszemy f' zamiast $f^{(1)}$, f'' zamiast $f^{(2)}$, ...

Twierdzenie (wzór Leibniza). Jeżeli funkcje f i g mają pochodne właściwe n-tego rzędu w punkcie x_0 , to

$$(f \cdot g)^{(n)}(x_0) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(n-k)}(x_0) \cdot g^{(k)}(x_0).$$

Definicja (pochodna funkcji wektorowej). Niech

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \text{ gdzie } t \in [\alpha, \beta]$$

będzie funkcją wektorową. Pochodną funkcji $\vec{r}$ w punkcie t określamy wzorem:

$$\vec{r}'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Podobnie określamy pochodną funkcji wektorowej

$\vec{r}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$, a także pochodne wyższych rzędów takich funkcji.

Twierdzenie Fermata (warunek konieczny istnienia ekstremum lokalnego)

Niech funkcja $f(x)$ spełnia następujące warunki:

1. istnieje pochodna $f'(x)$ w przedziale $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ dla pewnego $\delta > 0$
2. w x_0 funkcja $f(x)$ osiąga ekstremum lokalne, tzn. $f(x_0) \geq f(x)$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (maksimum lokalne) lub $f(x_0) \leq f(x)$ dla $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ (minimum lokalne)

Wtedy $f'(x_0) = 0$.

Uzasadnienie. Przypadek maksimum lokalnego: Ponieważ

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \text{ dla } x \leq x_0$$

i

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \text{ dla } x \geq x_0,$$

otrzymujemy

$$f_-(x_0) \geq 0 \text{ i } f_+(x_0) \leq 0.$$

Ponieważ $f'(x_0) = f_-(x_0) = f_+(x_0)$, z powyższych nierówności wynika równość $f'(x_0) = 0$.

Podobnie rozumiemy w przypadku minimum lokalnego.

Twierdzenia o wartości średniej.

1. Twierdzenie Rolle'a. Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. jest ciągła na $[a, b]$,

2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b) ,
3. $f(a) = f(b)$,

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = 0$.

Uzasadnienie. Przypadki:

1. $f(x) \equiv \text{const}$, wtedy w każdym $c \in (a, b)$, $f'(c) = 0$,
2. $f(x) \not\equiv \text{const}$, ponieważ $f(x)$ jest ciągła, istnieje co najmniej jeden $x_m \in [a, b]$, w którym $f(x_m) = \min f(x)$, dla $x \in [a, b]$ i podobnie istnieje co najmniej jeden $x_M \in [a, b]$, w którym $f(x_M) = \max f(x)$ dla $x \in [a, b]$. Ponieważ $f(x)$ nie jest stałą funkcją, $f(x_m) < f(x_M)$. Stąd wynika, że spośród x_m i x_M co najmniej jeden należy do (a, b) , który oznaczamy dalej przez c . Wtedy z twierdzenia Fermata wynika, że $f'(c) = 0$.

2. Twierdzenie Lagrange'a. Jeżeli funkcja f spełnia warunki:

1. jest ciągła na $[a, b]$,
2. ma pochodną właściwą lub niewłaściwą na (a, b) ,

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Uzasadnienie. Rozpatrujemy pomocniczą funkcję

$h(x) = f(x)(b-a) - x(f(b) - f(a))$. Sprawdzamy, że

$h(a) = h(b) = f(a)b - af(b)$. Z twierdzenia Rolle'a wynika, że $0 = h'(c) = f'(c)(b-a) - (f(b) - f(a))$ dla pewnego $c \in (a, b)$.

Twierdzenie (o funkcjach monotonicznych) Niech $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ będzie ciągła i niech $f'(x) \geq 0$ dla $x \in (a, b)$. Wtedy $f(x)$ jest niemalejąca. Podobnie, jeżeli $f'(x) \leq 0$, to $f(x)$ jest nierosnąca.

Uzasadnienie. Niech $a \leq x_1 \leq x_2 \leq b$. Wtedy istnieje $c \in (x_1, x_2)$ takie, że

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) \geq 0,$$

co oznacza, że $f(x)$ jest niemalejąca.

3. Twierdzenie Cauchy'ego. Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. są ciągłe na $[a, b]$,
2. mają pochodne właściwe lub niewłaściwe na (a, b) ,
3. $g'(x) \neq 0$ dla każdego $x \in (a, b)$,

to istnieje punkt $c \in (a, b)$ taki, że $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Uzasadnienie. Rozpatrujemy pomocniczą funkcję

$h(x) = f(x)(g(b) - g(a)) - g(x)(f(b) - f(a))$. Sprawdzamy, że

$h(a) = h(b) = f(a)g(b) - g(a)f(b)$. Z twierdzenia Rolle'a wynika, że $0 = h'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)) - g'(c)(f(b) - f(a))$ dla pewnego $c \in (a, b)$.

Reguła l'Hospitala obliczanie granic w przypadku wyrażeń nieoznaczonych

1. Twierdzenie (reguła de l'Hospitala dla nieoznaczności $\frac{0}{0}$). Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$, przy czym $g(x) \neq 0$ dla $x \in S(x_0)$,
2. istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to istnieje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uzasadnienie. Z twierdzenia Cauchy'ego wynika, że istnieje $c \in (x_0, x)$ taki, że

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Zauważamy, że $x \rightarrow x_0 \implies c \rightarrow x_0$. W ten sposób

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{c \rightarrow x_0} \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

2. Twierdzenie (reguła de l'Hospitala dla nieoznaczności $\frac{\infty}{\infty}$). Jeżeli funkcje f i g spełniają warunki:

1. $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$,
2. istnieje granica $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ (właściwa lub niewłaściwa),

to istnieje

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Uwaga. Reguła de l'Hospitala jest prawdziwa także dla granic jednostronnych oraz dla granic w $-\infty$ lub ∞ .

Przykład 11. Obliczyć podane granice

$$a) \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0,$$

$$b) \underbrace{\lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln \sin x}{\ln \operatorname{tg} x}}_{\frac{-\infty}{-\infty}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\ln \sin x)'}{(\ln \operatorname{tg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{(\sin x)' / \sin x}{(\operatorname{tg} x)' / \operatorname{tg} x} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\cos x / \sin x}{(1 / \cos^2 x) \cdot \cos x / \sin x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0+} \cos^2 x = 1,$$

$$c) \underbrace{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x + 1}{x^3}}_{\frac{\infty}{\infty}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x + 1)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(e^x)'}{(6x)'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{6} = \infty.$$

Tożsamości zmieniające rodzaje nieoznaczoności

Nieoznaczność	Stosowana tożsamość	Otrzymana nieoznaczoność
$0 \cdot \infty$	$f \cdot g = \frac{f}{1/g}$	$\frac{0}{0}$ lub $\frac{\infty}{\infty}$
$\infty - \infty$	$f - g = \frac{1/g - 1/f}{1/(fg)}$	$\frac{0}{0}$
$1^\infty, \infty^0, 0^0$	$f^g = e^{g \ln f}$	$\frac{0}{0}$ lub $0 \cdot \infty$

Rozwinięcie Taylora funkcji (wzór Taylora)

Założenie

- $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła
 - istnieją pochodne $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n+1)}(x)$ dla $x \in (a, b)$
- Wtedy dla każdego $x, x_0 \in (a, b)$, zachodzi

$$f(x) = f(x_0) + \frac{(x - x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x - x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0) + R_n$$

$$R_n = \frac{(x - x_0)^{(n+1)}}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi), \text{ dla pewnego } \xi \in (x_0, x)$$

Zastosowanie

1. wykorzystanie do przybliżonych obliczeń - przybliżenie wielomianowe rzędu n funkcji $f(x)$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{(x-x_0)}{1!} f'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2!} f''(x_0) + \frac{(x-x_0)^3}{3!} f'''(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^n}{n!} f^{(n)}(x_0)$$

błąd przybliżenia: $R_n = \frac{(x-x_0)^{(n+1)}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$ dla pewnego $\xi \in (x_0, x)$

Przykład 12. różniczka $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$ - przybliżenie I rzędu

Przykład 13. $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$, $x \in [-a, a]$.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}$$

$|f^{(m)}(x)| \leq 1$ dla każdego $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Stąd

$$|R_m| \leq \frac{(x-x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} \leq \frac{a^{m+1}}{(m+1)!} \rightarrow 0,$$

dla $x_0 = 0$, $x \in [-a, a]$, gdy $m \rightarrow \infty$.

Przykład 14. $f(x) = \cos x$, $x_0 = 0$, $x \in [-a, a]$.

$$\cos = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}$$

$|f^{(m)}(x)| \leq 1$ dla każdego $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Stąd

$$|R_m| \leq \frac{(x-x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} \leq \frac{a^{m+1}}{(m+1)!} \rightarrow 0,$$

dla $x_0 = 0$, $x \in [-a, a]$, gdy $m \rightarrow \infty$.

Przykład 15. $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$, $x \in [-a, a]$.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n$$

$|f^{(m)}(x)| = e^x \leq e^a$ dla każdego $m = 0, 1, 2, 3, \dots$. Stąd

$$|R_m| \leq \frac{(x - x_0)^{(m+1)}}{(m+1)!} e^a \leq \frac{a^{m+1}}{(m+1)!} e^a \rightarrow 0,$$

dla $x_0 = 0$, $x \in [-a, a]$, gdy $m \rightarrow \infty$.

Remark Jeżeli $x_0 = 0$ wzór Taylora nazywny jest wzorem Maclaurina.