

Lista 1

1.1 Logika, zbiory i notacja matematyczna

Zad. 1. Zbadać, czy podane sformułowania są zdaniami w logice. Jeśli są, to podać ich wartość logiczną:

1. "Paryż jest stolicą Francji";
2. "Liczba $10^{1000} + 1$ jest podzielna przez 2";
3. " $a^2 + b^2 = c^2$ ";
4. "Piotr nie jest moim bratem";
5. " $2^5 \geq 32$ ";
6. " $\Delta = b^2 - 4ac$ "

Zad. 2. Ocenic prawdziwość podanych niżej zdań złożonych:

1. "nieprawda, że funkcja $f(x) = x^2$ jest rosnąca na R ";
2. " $(-1)^{44} = -1$ lub 2008 jest liczbą parzystą";
3. "funkcja $g(x) = \sin x$ jest okresowa, a funkcja $f(x) = 3x$ jest nieparzysta";
4. "jeżeli Piotr jest synem Tadeusza, to Tadeusz jest starszy od Piotra".

Zad. 3. Zbadać, czy następujące zdania złożone są prawami logicznymi (tautologiami):

- a) $\neg(p \vee q) \Rightarrow [(\neg p) \wedge (\neg q)]$; b) $p \Rightarrow [(q \wedge \neg q) \Rightarrow r]$;
c) $(p \Rightarrow q) \Rightarrow [(\neg p) \vee q]$; d) $[p \vee (\neg q)] \vee [(\neg p) \wedge q]$.

Zad. 4. Zbiory określone za pomocą formy zdaniowej zapisać w prostszej postaci:

- a) $\{x \in R : x^2 = 4\}$
b) $\{k \in \{\clubsuit, \diamond, \heartsuit, \spadesuit\} : \text{w brydżu kolor } k \text{ jest starszy od } \diamond\}$;
c) $\{x \in R : (x < 3) \vee (x \geq 5)\}$;
d) $\{n \in N : n \text{ jest podzielne przez } 5\}$;
e) $\{x \in R : (x > 0) \Rightarrow (x^2 > 0)\}$;
f) $\{(x, y, z) : x, y, z \in N \wedge x < y < z \wedge xyz = 16\}$.

Zad. 5. Zbadać, czy następujące formy zdaniowe z kwantyfikatorami są prawdziwe:

- a) $\bigvee_{x \in R} \sin x = \frac{1}{2}$; b) $\bigwedge_{x \in R} x^2 + 4x + 3 > 0$;
c) $\bigwedge_{x \in R} \bigvee_{y \in R} x^2 - y^2 = 0$; d) $\bigvee_{y \in R} \bigwedge_{x \in R} xy = 0$;

Zad. 6. Dla par zbiorów $A, B \subset R$ wyznaczyć $A \cup B$, $A \cap B$, A/B , B/A , A^c , B^c , $A \triangle B (= ((A/B) \cup (B/A)))$, jeżeli:

- a) $A = (0, 5)$, $B = [0, 7]$;
b) $A = (-\infty, 3)$, $B = (-1, \infty)$;

- c) $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$;
d) $A = \{\frac{1}{n} : n \in N\}$, $B = \{\frac{2}{n} : n \in N\}$.

Wskazać te pary A, B , dla których $A \subset B$.

Zad. 7. Określić relacje zawierania między zbiorami A, B , jeżeli:

- a) $A \cup B = A$; b) $A \cup B \subset A$;
c) $A \setminus B = A$; d) $B \subset A \cap B$.

1.2 Podstawowe zbiory liczbowe

Zad. 8. Przypomnij sobie dowód tego, że $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$. Pokaż, że jeśli p jest liczbą pierwszą, to $\sqrt{p}$ jest liczbą niewymierną.

Zad. 9. Pokaż, że jeśli $n \in N$ jest taką liczbą naturalną, że $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}$, to istnieje liczba naturalna k taka, że $n = k^2$.

Zad. 10. Pokaż, że jeśli $q \in \mathbb{Q}$, to $\sqrt{2} + q \notin \mathbb{Q}$. Dla jakich liczb wymiernych $q \in \mathbb{Q}$ mamy $q\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$?

Zad. 11. Niech $a = 3.1415926535897932385\dots$. Dla $n \in N$ definiujemy liczby

$$a_n = \frac{[a \cdot 10^n]}{10^n}.$$

Wyznacz pierwsze 10 wyrazów tego ciągu, tzn. oblicz liczby $a_0, a_1, \dots, a_9$.

Uwaga: $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x .

Zad. 12. Pokaż metodą indukcji matematycznej, że

$$1. \quad 1 + 2 + \dots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

Uwaga: Powinniśmy znać również inne proste wyprowadzenie tego wzoru:

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & + & 2 & + & 3 & + & \dots & + & n & + & & \\ n & + & (n-1) & + & (n-2) & + & \dots & + & 1 & & & \\ \hline (n+1) & + & (n+1) & + & (n+1) & + & \dots & + & (n+1) & = & n(n+1) \end{array}$$

$$2. \quad 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$3. \quad 1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$4. \quad \bigwedge (n \in N) (n < 2^n)$$

$$5. \quad (\bigwedge n \geq 5) (n^2 < 2^n)$$

$$6. \quad (\bigwedge (n \geq 4) (2^n < n!))$$

$$7. \quad (\bigwedge (n > 1) (6 \mid n^3 - n))$$

Zad. 13. Pokaż, korzystając z poprzedniego zadania, że $1 + 3 + 5 + \dots + (2n + 1) = (n + 1)^2$. Podaj interpretację geometryczną tego faktu.

np.

				9
			7	
		5		
	3			
1				

Zad. 14. Załóżmy, że $n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ jest nieskończonym ciągiem liczb naturalnych. Pokaż, że $(\bigwedge n \in N)(k \leq n_k)$.

Zad. 15. Korzystając ze wzoru dwumianowego Newtona

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k},$$

$\binom{n}{k}$ są współczynnikami liczbowymi w tym rozwinięciu. Pokaż, że

- $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$
- $\sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} = 0$.

Zad. 16. Wyznacz samodzielnie sześć pierwszych wierszy trójkąta Pascala. Wypisz wzory na $(x + y)^n$ dla $n = 0, 1, 2, \dots, 5$.

Zad. 17. Symbolem $|X|$ oznaczamy liczbę elementów skończonego zbioru X . Niech X będzie n - elementowym zbiorem. Dla $k \leq n$ określamy

$$[X]^k = \{Y \subset X : |Y| = k\}.$$

- Pokaż, że $|[X]^k| = \binom{n}{k}$
- Korzystając z poprzedniego wyniku podaj kombinatoryczne wyprowadzenie tożsamości Pascala $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$.
- Pokaż, że jeśli $0 < k \leq n$, to $\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$. Zauważ, że stąd wynika równość $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.
- Symbolem $P(X)$ oznaczamy zbiór wszystkich podzbiorów zbioru X . Pokaż, że jeśli $|X| = n$, to $|P(X)| = 2^n$.

Zad. 18. Narysuj wykres wartości $\binom{20}{k}$ dla $k = 0, 1, 2, \dots, 20$. Która z tych liczb jest największa? Wskazówka: Możesz, np., skorzystać z funkcji KOMBINACJE programu Excel.
Uogólnij to spostrzeżenie dla ciągu liczb $\{\binom{n}{k}\}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n$ dla dowolnego n .

Zad. 19. Pokaż, że $\binom{m+n}{k} = \sum_{l=0}^k \binom{m}{l} \binom{n}{k-l}$, przy założeniu, że $k \leq \min(m, n)$.

2.1 Liczby rzeczywiste

Zad. 20. Wyznacz następujące zbiory:

1. $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 3x + 2 > 0\}$,
2. $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \leq 0\}$,
3. $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 \geq 0\}$,
4. $D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 4x + 3 > 0\}$.

Zad. 21. Każdy ograniczony z góry podzbiór $A \subset \mathbb{R}$ ma kres górny $\sup(A) \in \mathbb{R}$.

Niech $A \subset \mathbb{R}$ będzie ograniczony z dołu. Pokaż, że $\inf(A) = -\sup(-A)$, gdzie $-A = \{-a : a \in A\}$. Wywnioskuj z tego, że każdy ograniczony z dołu podzbiór R ma kres dolny.

Zad. 22. Wyznacz kresy dolny i górny następujących zbiorów:

1. $\{\frac{n}{n+1} : n \in \mathbb{N}\}$
2. $(0, 1) \cup (3, 4]$
3. $(0, 1] \cap \mathbb{Q}$
4. $[0, 1]/\mathbb{Q}$
5. $\mathbb{N}$
6. $\mathbb{Z}$

Zad. 23. Niech $A = \{x \geq 0 : x^2 < 2\}$. Pokaż, że $(\sup(A))^2 = 2$ (czyli, że $\sup(A) = \sqrt{2}$).

Zad. 24. Korzystając z tego, że $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, pokaż, że $|\sin(x) + 2\cos(x)| \leq \sqrt{5}$ dla każdego $x \in \mathbb{R}$.

Wsk. Zauważ, że jeśli $\vec{v} = [\sin(x), \cos(x)]$, $\vec{w} = [1, 2]$, to $\sin(x) + 2\cos(x) = \vec{v} \circ \vec{w}$ (iloczyn skalarny $\vec{v}$ i $\vec{w}$).