Lista 2

2. Liczby rzeczywiste. Ciągi liczbowe (wstęp)

Zad. 1. . Zbadaj, czy podane zbiory są ograniczone od dołu, od góry, czy są ograniczone:

$$a)\ A=\{x\in\mathbb{R}:\sin x\};\quad b)\ B=\left\{\frac{2n}{3+n}:n\in\mathbb{N}\right\};\quad c)\ C=\left\{\frac{p}{q}:p,q\in\mathbb{N},p<q\right\}.$$

Zad. 2. . Zbadaj, czy podane zbiory mają elementy największe, najmniejsze. Znajdź kresy tych zbiorów:

$$a)\ (0,1)\cup\{5\};\quad b)\ B=\left\{\frac{4n}{n^2+1}:n\in\mathbb{N}\right\};\quad c)\ C=\left\{\frac{2n}{n+1}:n\in\mathbb{N}\right\};$$
$$d)\ D=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}:n\in\mathbb{N}\right\};\quad e)\ E=[\sqrt{2},\infty)\cap\mathbb{Q}.$$

Zad. 3. . Zbadaj, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

$$a)\ a_n=\frac{2+\sin n}{3-2\cos n};\quad b)\ a_n=\sqrt[n]{3n-1};\quad c)\ a_n=2-\sqrt{n};$$
$$d)\ a_n=\sqrt{n+8}-\sqrt{n+3};\quad e)\ a_n=\frac{1}{4^1+1}+\frac{1}{4^2+2}+\cdots+\frac{1}{4^n+n}.$$

Zad. 4. . Zbadaj, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

$$a)\ a_n=3^{n+1}-2n;\quad b)\ a_n=\frac{n^2}{n^2+1};\quad c)\ a_n=\frac{7^n}{n!};$$

$$d)\ a_n=\sqrt{n^2-6n+10};\quad e)\ a_n=\frac{4^n}{2^n+3^n};\quad f)\ a_n=\sqrt{n^2+1}-n.$$

Zad. 5. . Korzystając z definicji granicy właściwej lub niewłaściwej ciągu uzasadnij równości:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{2-n}{n+5}=1;\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0;\quad c)\ \lim_{n\to\infty}3^n=\infty.$$

Zad. 6. . Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów oblicz granice:

$$a)\ \lim_{n\to\infty}\frac{3n-1}{n+4};\quad b)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n^2-1};\quad c)\ \lim_{n\to\infty}\frac{n^6-3n^4+2}{5-10n^6};$$
$$d)\ \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{27}-\sqrt[n]{8}}{\sqrt[n]{3}-\sqrt[n]{2}};\quad e)\ \lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}-4^n}{5^n-4^{n+2}};f)\ \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+4n+1}-\sqrt{n^2+2n}).$$

Zad. 7. . Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach oblicz granice:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n+(-1)^n}{5n+4}$; $b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lfloor n\sqrt{12}\rfloor}{\lfloor n\sqrt{3}\rfloor}$; $c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n^2}+\dfrac{3}{n^3}}$;

$d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}$.

Zad. 8. . Oblicz granice z liczbą e:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{3n-2}$; $b)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$; $c)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n}{3n+1}\right)^{n}$;

$d)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{3n+1}{3n-1}\right)^{n}$; $e)\ \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+4}{n+3}\right)^{5-2n}$.

Zad. 9. . Korzystając z twierdzenia o granicach niewłaściwych ciągów oblicz granice:

$a)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+1}{n}$; $b)\ \lim\limits_{n\to\infty}(n^4-3n^3-2n^2-1)$; $c)\ \lim\limits_{n\to\infty}(1++2^n-3^n)$;

$d)\ \lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n^2+1}-n)$; $e)\ \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-(n+1)!}{n!+2}$.

Zad. 10. . Znajdź punkty skupienia podanych ciągów:

$a)\ a_n=\dfrac{(-1)^n n}{n+1}$; $b)\ b_n=\sin^2\dfrac{n\pi}{4}$; $c)\ c_n=(1+(-1)^n)\cdot 2^n$;

$d)\ d_n=\left(1+\dfrac{\cos\pi n}{n}\right)^n$; $e)\ e_n=\sqrt{n}-\lfloor\sqrt{n}\rfloor$.

Zad. 11. . Znajdź granice dolne i górne podanych ciągów:

$a)\ a_n=\dfrac{(-2)^{n+1}}{2^n+1}$; $b)\ b_n=\operatorname{tg}\dfrac{(2n+1)\pi}{4}$; $c)\ c_n=(1+\cos\pi n)n!$;

$d)\ d_n=2-(-1)^n$; $e)\ e_n=\sin\dfrac{n\pi}{4}$.