3. Ciągi liczbowe (lista dodatkowa)

1 Ciągi liczbowe

Zadanie 1. Dla podanych ciągów napisać wzory określające wskazane wyrazy tych ciągów:

$a)$ $x_n = n^n$, x_{2n} $\qquad$ $b)$ $y_n = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2} + \cdots + \frac{1}{3n}$, y_{n+1}

$c)$ $a_n = \sqrt[n]{n^2+1}$, a_{n+1}; $\qquad$ $d)$ $b_n = \frac{1}{(2n)!}$, b_{3n+2};

Zadanie 2. Na podstawie wartości kilku początkowych wyrazów podanych ciągów znaleźć ich wzory ogólne:

$a)$ $1, 2, 6, 24, 120, \ldots$; $\qquad$ $b)$ $1, \frac{1}{2}, 3, \frac{1}{4}, 5, \frac{1}{6}, \ldots$;

$c)$ $0, 1, 0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots$; $\qquad$ $d)$ $0, 1, 5, 23, 119, \ldots$;

Zadanie 3. Zbadać, czy podane ciągi są ograniczone z dołu, z góry, są ograniczone:

$a)$ $x_n = n^4 - n^2$; $\qquad$ $b)$ $y_n = (-1)^n n!$;
$c)$ $z_n = \sqrt[n]{2^n+1}$; $\qquad$ $d)$ $t_n = \frac{(-2)^n}{1+(-2)^n}$;
$d)$ $a_n = \frac{2+\cos n}{3-2\sin n}$; $\qquad$ $e)$ $b_n = 2^n - 3^n$;
$h)$ $c_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{2}$; $\qquad$ $i)$ $d_n = \frac{n^n}{n!}$.

Zadanie 4. Zbadać, czy podane ciągi są monotoniczne od pewnego miejsca:

$a)$ $x_n = \frac{1}{n^2-6n+10}$ $\qquad$ $b)$ $y_n = \frac{4^n}{2^n+3^n}$

$c)$ $a_n = n^2 - 49n - 50$ $\qquad$ $d)$ $b_n = 3^n + (-2)^n$

Zadanie 5. Korzystając z definicji granicy właściwej ciągu uzasadnić podane równości:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n+1}{n^2} = 0$ $\qquad$ $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}+1} = 2$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \left[\frac{3n+1}{n+1}\right] = 2$ $\qquad$ $d)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1000}{n!} = 0$

Uwaga. Symbol $[x]$ oznacza część całkowitą liczby x.

Zadanie 6. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic ciągów obliczyć podane granice:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt[4]{n^4+16}-n\right)$ $\quad b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n^2+1)n!+1}{(2n+1)(n+1)!}$

$c^*)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}$ $\quad d^*)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$

Zadanie 7. Korzystając z twierdzenia o trzech ciągach znaleźć podane granice:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n2^n+1}$ $\quad b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{[n\pi]}{n}$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+(-1)^n}{3n+2}$ $\quad d)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{3^n+2^n}{5^n+4^n}}$

$e)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n+1]{2n+3}$ $\quad f)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{3+\sin n}$

Zadanie 8. Korzystając z twierdzenia o ciągu monotonicznym i ograniczonym uzasadnić zbieżność podanych ciągów:

$a)$ $z_n=\frac{1}{1\cdot 2^1}+\frac{1}{2\cdot 2^2}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2^n}$ $\quad b)$ $t_1=2,\ \ t_{n+1}=\sqrt{6+t_n}$

$c)$ $c_n=\frac{1}{4^1+1}+\frac{1}{4^2+2!}+\cdots+\frac{1}{4^n+n!}$ $\quad d)$ $d_n=\frac{(n+1)^3}{n!}$

Obliczyć granice ciągów $\{t_n\}$, $\{d_n\}$.

Zadanie 9. Korzystając z definicji liczby e oraz z twierdzenia o granicy podciągu obliczyć granice:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{5n+2}{5n+1}\right)^{15n}$ $\quad b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\frac{3n+2}{5n+2}\right)^n\cdot\left(\frac{5n+3}{3n+1}\right)^n\right]$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{(-1)^n n}$ $\quad d)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^2-3}$

Zadanie 10. Znaleźć podane granice:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n^n+5}$ $\quad b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(3^n\cos n-4^n)$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}$ $\quad d)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

Zadanie 11. Korzystając z definicji granicy niewłaściwej ciągu uzasadnić podane równości:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\log_2(n+3)=\infty$ $\quad b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(n^4-1)=\infty$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n}-n)=-\infty$ $\quad d)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(10-\sqrt[3]{n})=-\infty$

Zadanie 12. Obliczyć podane granice:

$a)$ $\lim\limits_{n\to\infty}(n^4-3n^3-2n^2-1)$ $\quad$ $b)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1-(n+1)!}{n!+2}$

$c)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{3}-\cos\frac{\pi}{n}\right)^n$ $\quad$ $d)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} n}{\operatorname{arc\,ctg} n}$

$e)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+1}{n}$ $\quad$ $f)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)^n$

$g)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\sin^n\frac{n+1}{n}$ $\quad$ $h)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{arc\,tg} 2^n}{2^n}$

Zadanie 13. Znaleźc zbiory punktów skupienia (właściwych i niewłaściwych) podanych ciągów:

$a)$ $a_n=\frac{(-1)^n n}{n+1}$ $\quad$ $b)$ $b_n=\sin^2\frac{n\pi}{4}$

$c)$ $c_n=[1+(-1)^n]\cdot 2^n$ $\quad$ $d)$ $d_n=\left(1+\frac{\cos n\pi}{n}\right)^n$

$e)$ $v_n=(-1)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}+4\cdot(-1)^{\lfloor\frac{n}{3}\rfloor}$ $\quad$ $f^*)$ $u_n=\sin n$

* - zadanie trudniejsze