Lista zadań 4

Zadanie 1. Określić dziedziny naturalne podanych funkcji:

a) $f(x) = \sqrt{\sin x}$; *b)* $g(x) = \frac{1}{1+\cos x}$;
c) $h(x) = \frac{x^3-1}{x-1}$; *d)* $p(x) = \log_3(1+|x|)$;
e) $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$; *f)* $r(x) = \frac{2^x}{2^x-4}$.

Zadanie 2. Znaleźć zbiory wartości podanych funkcji:

a) $f(x) = x^4 + 2x^2 - 3$; *b)* $g(x) = \frac{1}{|x|-1}$;
c) $h(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$; *d)* $p(x) = 4 - 5\sin x$;
e) $q(x) = 3e^{-|x|}$; *f)* $r(x) = \sqrt{1+3^x+5^x}$.

Zadanie 3. Zbadać, czy podane funkcje są ograniczone z dołu, są ograniczone z góry, są ograniczone:

a) $f(x) = 1 + 3^x$; *b)* $g(x) = 4 - 3\cos x$;
c) $h(x) = \log_2 x$; *d)* $p(x) = 2 - 3x - x^2$;
e) $q(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$; *f)* $r(x) = \frac{x^{12}}{x^4+1}$.

Zadanie 4. Uzasadnić, że podane funkcje są monotoniczne na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = -4x + 5$, $\mathbb{R}$; *b)* $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $\mathbb{R}$;
c) $h(x) = \frac{1}{x^2}$, $(-\infty, 0)$; *d)* $p(x) = \frac{1}{2x+1}$, $[1, \infty)$;
e) $q(x) = 4x - x^2$, $[2, \infty)$; *f)* $r(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$, $[1, \infty)$.

Zadanie 5. Określić funkcje złożone $f \circ f$, $f \circ g$, $g \circ f$, $g \circ g$, jeżeli:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$; *b)* $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = 2^x$;
c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4$; *d)* $f(x) = \sin x$, $g(x) = \frac{1}{x}$.

Zadanie 6. Uzasadnić, że podane funkcje są różnowartościowe na wskazanych zbiorach:

a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $\mathbb{R}\backslash\{0\}$; *b)* $g(x) = x^4$, $[0, \infty)$;
c) $h(x) = \sqrt{x} - 3$, $[0, \infty)$; *d)* $p(x) = x - \sqrt{x}$, $\left[\frac{1}{4}, \infty\right)$.

Zadanie 7. Znaleźć funkcje odwrotne do podanych:

a) $f(x) = 1 - 3^{-x}$; *b)* $g(x) = x^5 + \sqrt{3}$;
c) $h(x) = x^6 \operatorname{sign} x$; *d)* $p(x) = 3 - \sqrt[3]{x+2}$;
e) $q(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{dla } x < 0, \\ 2 + x & \text{dla } x \geq 0; \end{cases}$ *f)* $r(x) = \log_2^3(x+1)$.

Zadanie 8. Naszkicować wykresy funkcji:

$$a)\ \ f(x) = \operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x); \quad b)\ \ g(x) = \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x); \qquad c)\ \ h(x) = \operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} x).$$

Zadanie 9. Niech $f(x) = \frac{1}{x^2-4}$.
a) Wyznacz następujące granice:

$$\lim_{x\to\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x), \qquad \lim_{x\to-2^-} f(x),$$
$$\lim_{x\to-2^+} f(x), \qquad \lim_{x\to2^-} f(x), \qquad \lim_{x\to2^+} f(x).$$

b) Naszkicuj wykres tej funkcji.

Zadanie 10. Narysuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

$$y = \tfrac{x}{x-1}; \qquad y = x - \lfloor x \rfloor; \qquad y = x \sin \tfrac{1}{x};$$
$$y = x^2 \sin \tfrac{1}{x}; \qquad y = \tfrac{1}{x} \sin \tfrac{1}{x}.$$

oraz wyznacz ich granice (jeżeli istnieją) w punkcie $x = 0$.

Zadanie 11. Naszkicuj wykresy funkcji zadanych wzorami:

$$y = \frac{1}{x^2-1}, \quad y = \frac{x}{x^2-1}, \quad y = \frac{x^2}{x^2-1}, \quad y = \frac{x^3}{x^2-1}.$$

Zadanie 12. Narysować przykłady wykresów funkcji spełniających wszystkie podane warunki:

a) $\lim\limits_{x\to-\infty} u(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} u(x) = 1$, $u(2) = 0$, $\lim\limits_{x\to\infty} u(x) = -1$,
b) $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 5$,
c) $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -4$, $\lim\limits_{x\to-1} h(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} h(x) = 4$,
d) $\lim\limits_{x\to-\infty} q(x) = 4$, $\lim\limits_{x\to1} q(x) = \infty$, funkcja q jest nieparzysta,
e) $\lim\limits_{x\to0^-} r(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} (r(x) - x) = -1$, funkcja r jest parzysta.

Zadanie 13. Korzystając z twierdzeń o arytmetyce granic funkcji oblicz granice:

$$a)\ \lim_{x\to64} \frac{\sqrt[3]{x} - 4}{\sqrt{x} - 8}; \quad b)\ \lim_{x\to0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{2x}; \quad c)\ \lim_{x\to-\infty} (\sqrt{x^2+1} + x).$$

Zadanie 14. Korzystając z twierdzenia o trzech funkcjach uzasadnij równości:

$$a)\ \lim_{x\to 0} x^3 \operatorname{arctg}\frac{1}{x} = 0; \quad b)\ \lim_{x\to\infty} \frac{\lfloor x\sqrt{8}\rfloor}{\lfloor x\sqrt{2}\rfloor} = 2; \quad c)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{2^{-x}+\sin x}{2^{-x}+\cos x}.$$

Zadanie 15. Korzystając z granic podstawowych wyrażeń nieoznaczonych oblicz następujące granice:

$$a)\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 3x}{x^2}; \quad b)\ \lim_{x\to-\infty} \frac{\ln(1+2^x)}{3^x}; \quad c)\ \lim_{x\to 0+} \frac{2^x-1}{4^{\sqrt{x}}-1}; \quad d)\ \lim_{x\to 0} (1+\operatorname{tg}(2x))^{\operatorname{ctg} x}.$$

Zadanie 16. Znajdź wszystkie asymptoty wykresu funkcji:

$$a)\ y = \frac{x^3+x^2}{x^2-4}; \quad b)\ y = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-9}}; \quad c)\ y = \frac{\sin^2 x}{x^3}.$$

Zadanie 17. Niech

$$\operatorname{sign}(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x<0, \\ 0 & \text{dla } x=0, \\ 1 & \text{dla } x>0. \end{cases}$$

a) Pokaż, że funkcja sign nie jest ciągła w punkcie 0.
b) Wyznacz punkty ciągłości funkcji sign.

Zadanie 18. Wyznacz punkty ciągłości następujących funkcji:
$f_1(x) = \operatorname{sign}(\sin x)$, $f_2(x) = \operatorname{sign}(\cos x)$, $f_3(x) = \lfloor x\rfloor$, $f_4(x) = \lfloor \frac{1}{x}\rfloor$.

Zadanie 19. Załóżmy, że funkcja f jest ciągła. Pokaż, że funkcja $g(x) = |f(x)|$ jest również ciągła. (Wsk: złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą.)

Zadanie 20. Załóżmy, że funkcje f i g są ciągłe. Niech $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$. Pokaż, że h jest funkcją ciągłą.

Zadanie 21. Oblicz granice wielomianu postaci $w(x) = x^n + a_{n-1}x_{n-1} + ... + a_1x + a_0$ w nieskończoności oraz w minus nieskończoności. (Wsk: Rozważ oddzielnie przypadek dla n parzystego oraz n nieparzystego.)

Zadanie 22. Pokaż, że każdy wielomian stopnia nieparzystego ma pierwiastek. (Wsk: Skorzystaj z poprzedniego zadania oraz własności Darboux funkcji ciągłych.)

Zadanie 23. Załóżmy, że $f : [0,1] \to [0,1]$ jest funkcją ciągłą. Pokaż, że istnieje takie $x \in [0,1]$, że $f(x) = x$. (Wsk: Przyjrzyj się funkcji $g(x) = f(x) - x$.)

Zadanie 24. a) Cząstka pewnego układu drgającego porusza się po osi Ox. Położenie tej cząstki w chwili $t > 0$ jest opisana wzorem $x(t) = 5 - 4^{-3t} \cdot \cos(2t + 1)$. Znaleźć jej graniczne położenie, gdy $t \to \infty$. Co oznacza otrzymany wynik?

b) Równanie $ax^4 - 2x - 8 = 0$ ma dla parametru $a > 0$ dwa pierwiastki rzeczywiste $x_1(a)$, $x_2(a)$). Obliczyć granice $\lim\limits_{a\to 0+} x_1(a)$, $\lim\limits_{a\to 0+} x_2(a)$, $\lim\limits_{a\to\infty} x_1(a)$, $\lim\limits_{a\to\infty} x_2(a)$.

Wskazówka. Narysować wykresy funkcji $y = ax^4$ oraz $y = 2x + 8$. Następnie zbadać położenie punktów wspólnych obu wykresów, gdy $a \to 0^+$ oraz, gdy $a \to \infty$.

Zadanie 25. Korzystając z definicji Heinego uzasadnić ciągłość podanych funkcji na $\mathbb{R}$:

a) $u(x) = \frac{x^2}{x^2+2}$ *b)* $v(x) = \sin^2 x$,
c) $f(x) = 2x - 5$ *d)* $g(x) = \sin x$,
e) $r(x) = \sqrt{x^4 + 1} \cos x$.

Zadanie 26. Wyznaczyć zbiory punktów ciągłości podanych funkcji:

a) $u(x) = (x^3 - x)\,[x]\,,$ *b)* $v(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x = 0 \text{ lub } \pi \\ \frac{\pi \sin x}{x(x-\pi)} \text{ dla } x \neq 0 \text{ i } \pi, \end{cases}$

c) $g(x) = [x]\,(x - 1),$ *d)* $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ dla } x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \\ \frac{x}{\sin x} \text{ dla } x \neq k\pi,\ k \in \mathbb{Z}, \end{cases}$

e) $p(x) = \operatorname{sign}(x^2) \cos \frac{\pi}{2} x,$ *f)* $h(x) = \begin{cases} \text{dla } x \leq 0 \\ \sqrt{x} \cos \frac{1}{x^2} \text{ dla } x > 0. \end{cases}$

Zadanie 27. Dobrać parametry $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby podane funkcje były

ciągłe we wskazanych punktach:

a) $u(x) = \begin{cases} \sin x \text{ dla } |x| \geq \frac{\pi}{2} \\ ax + b \text{ dla } |x| < \frac{\pi}{2} \end{cases}$
$x_1 = -\frac{\pi}{2},\ x_2 = \frac{\pi}{2},$

b) $v(x) = \begin{cases} 2 \text{ dla } x \leq 0 \\ a^x + b \text{ dla } 0 < x < 1 \\ 3 \text{ dla } x \geq 1 \end{cases}$
$x_1 = 0,\ x_2 = 1,$

c) $f(x) = \begin{cases} bx \text{ dla } x < \pi, \\ \frac{\sin x}{ax} \text{ dla } x \geq \pi \end{cases}$
$x_0 = \pi,$

d) $g(x) = \begin{cases} bx + 3 \text{ dla } x < 1 \\ 2x^2 + x + a \text{ dla } x \geq 1 \end{cases}$
$x_0 = 1,$

e) $h(x) = \begin{cases} (x-1)^3 \text{ dla } x \leq 0, \\ ax + b \text{ dla } 0 \leq x < 1, \\ \sqrt{x} \text{ dla } x \geq 1, \end{cases}$
$x_1 = 0,\ \ x_2 = 1;$

f) $g(x) = \begin{cases} x \text{ dla } |x| \leq 1, \\ x^2 + ax + b \text{ dla } x > 1, \end{cases}$
$x_1 = -1,\ \ x_2 = 1.$

Zadanie 28. Uzasadnić ciągłość podanych funkcji na wskazanych zbiorach:

a) $u(x) = e^x \cos x,\ \ \mathbb{R};$

b) $v(x) = \frac{1}{\sqrt{16 - x^4}},\ \ (-2, 2);$

c) $w(x) = \operatorname{arc\,tg} \sqrt{x},\ \ [0, \infty);$

d) $z(x) = \sqrt{\sin x},\ \ \bigcup_{k \text{ß} \mathbb{Z}} [2k\pi, (2k+1)\pi];$

e) $f(x) = \frac{x}{|x|+1},\ \ \mathbb{R};$

f) $g(x) = \sqrt{e^x + x^2},\ \ \mathbb{R}.$

Zadanie 29. Określić rodzaje nieciągłości podanych funkcji:

a) $u(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{\sqrt{x}-1} & \text{dla } x \in (0,1) \cup (1, \infty), \\ 3 & \text{dla } x = 1, \end{cases}$
$x_0 = 1;$

b) $v(x) = \begin{cases} \frac{e^{\frac{1}{x}}+2}{e^{\frac{1}{x}}+1} & \text{dla } \neq 0, \\ e & \text{dla } x = 0, \end{cases}$;
$x_0 = 0$

c) $f(x) = \operatorname{sign}\left[x(x-1)\right],\ \ x_0 = 1$

d) $g(x) = \begin{cases} x \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{x} & \text{dla } x \neq 0, \\ \frac{\pi}{2} & \text{dla } x = 0. \end{cases}$
$x_0 = 0;$

Zadanie 30. Korzystając z twierdzenia Weierstrassa o przyjmowaniu kresów uzasadnić, że podane zagadnienia ekstremalne mają rozwiązania:

1. wśród stożków wpisanych w kulę o promieniu r istnieje ten, który ma największą objętość;
2. wśród prostokątów opisanych na danej elipsie istnieje ten, który ma najmniejsze i największe pole;

3. wśród graniastosłupów prawidłowych o podstawie sześciokątnej wpisanych w kulę o promieniu r istnieje ten, który ma największą objętość;

Zadanie 31. Uzasadnić, że podane równania mają jednoznaczne rozwiązania we wskazanych przedziałach:

$a)$ $x^3 + 6x - 2 = 0$, $(0, 1)$; $b)$ $x \sin x = 7$, $\left(2\pi, \frac{5\pi}{2}\right)$;

$c)$ $1 = \frac{\sin x}{2} + x$, $(0, \frac{\pi}{2})$; $d)$ $\operatorname{arc\,tg} x = \frac{1}{x^2}$, $(\frac{1}{\sqrt{3}}, \sqrt{3})$;

$e)$ $x^{100} + x - 1 = 0$ $(\frac{1}{2}, 1)$; $f)$ $x \cdot 2^x = 1$, $(0, 1)$;

Zadanie 32. Korzystając z twierdzenia Darboux o przyjmowaniu wartości pośrednich uzasadnić następujące stwierdzenia:

1. na każdym szlaku turystycznym wiodącym z Karpacza (800 m nad poziomem morza) na Śnieżkę (1602 m nad poziomem morza) jest miejsce, które wznosi się 1000 m nad poziomem morza;
2. na dowolnej figurze wypukłej na płaszczyźnie można opisać kwadrat;
3. jeżeli zegar o północy spóźniał się o 5 min. a po nakręceniu, ale bez przestawiania wskazówek, następnego dnia o północy spieszył się o 10 min, to w pewnej chwili wskazywał właściwy czas;