Wykład 1. Elementy logiki i rachunku zbiorów

Język matematyki, liczby rzeczywiste

I. Rachunek zdań. Pojęcie zdania, wartości logicznych i pojęcie tautologii.

Przykłady zdań:

- p="suma kątów w trójkącie jest równa 180°"
- q ="$2+2=5$"
- r ="$2+2=4$"
- s ="$2+2\neq 5$"

Operacje na zdaniach

- $\neg p$ (negacja)
- $p \vee q$ (alternatywa)
- $p \wedge q$ (koniunkcja)
- $p \Rightarrow q$ (implikacja)
- $p \Leftrightarrow q$ (równoważność)

Wartość logiczna zdania:

jeżeli zdanie p jest prawdziwe, to przypisujemy mu wartość logiczną 1,
jeżeli zdanie p jest fałszywe, to przypisujemy mu wartość logiczną 0,

Wyznaczanie wartości logicznej zdań złożonych.

Przykład dla alternatywy, koniunkcji, implikacji oraz równoważności:

p	q	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

p	q	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

p	q	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Def. Tautologia: zdanie złożone, którego wartość logiczna jest równa 1 bez względu na to jakiej wartości logicznej są jego składniki. Symbol $\models$ oznacza, że zdanie występujące po nim jest tautologią. Przykłady:

- $\models \neg p \vee p$
- $\models p \Rightarrow q \Leftrightarrow \neg p \vee q$ (prawo eliminacji implikacji)
- $\models \neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$ (prawo de Morgana)
- $\models \neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ (prawo de Morgana)

2. Def. Funkcją zdaniową (formułą zdaniową) $\psi(x)$ na zbiorze Ω nazywamy dowolne wyrażenie, które staje się zdaniem w sensie logiki dla każdego $x \in \Omega$.

   Przykład
   $\psi(x) = x^2 + 5 < 8$, $x \in \Omega = \mathbb{R}$
   dla każdego wybranego x, $\psi(x)$ staje się zdaniem logicznym; dla jednych argumentów x jest to zdanie prawdziwe, dla innych jest to zdanie fałszywe.

   Przykład
   $\psi(x, y) = x < y$, $x, y \in \Omega = \mathbb{R}$
   formuła zdaniowa może być funkcją jednego, dwóch lub większej liczby argumentów.

3. Kwantyfikatory

   - kwantyfikator ogólny: $\bigwedge\limits_x \phi(x)$, czytamy "dla każdego x zachodzi (prawdziwe jest zdanie) $\phi(x)$"

     Przykład

     $\bigwedge\limits_x x^2 \geq 0$ - zdanie prawdziwe,

     $\bigwedge\limits_x x^2 + x \geq 0$ - zdanie fałszywe, (rozpatrz np. $x = -0.5$)

   - kwantyfikator szczególny: $\bigvee\limits_x \phi(x)$, czytamy "istnieje taki x, że zachodzi (jest prawdziwe) zdanie $\phi(x)$"

     Przykład

     $\bigwedge\limits_x x^2 \geq 0$ - zdanie prawdziwe,

$\bigwedge\limits_x x^2 + x < -1$ - zdanie fałszywe,

4. negacja wyrażenia logicznego z kwantyfikatorem

$$\neg\left(\bigwedge_x \phi(x)\right) \Leftrightarrow \bigvee_x \neg\phi(x)$$

$$\neg\left(\bigvee_x \phi(x)\right) \Leftrightarrow \bigwedge_x \neg\phi(x)$$

Przykład

$\neg\left(\bigwedge\limits_x x^2 + x < -1\right) \Leftrightarrow \bigvee\limits_x x^2 + x \geq -1$ ostatnie zdanie jest prawdziwe

5. zasady stosowania kwantyfikatorów w przypadku funkcji zdaniowych ϕ dwóch lub większej liczby argumentów

   - $\bigwedge\limits_x \bigwedge\limits_y \phi(x,y) \Leftrightarrow \bigwedge\limits_y \bigwedge\limits_x \phi(x,y)$

     $\bigvee\limits_x \bigvee\limits_y \phi(x,y) \Leftrightarrow \bigvee\limits_y \bigvee\limits_x \phi(x,y)$

     (zmiana kolejności kwantyfikatorów tego samego rodzaju nie zmienia wartości logicznej wyniku)
   - zdania $\bigwedge\limits_x \bigvee\limits_y \phi(x,y)$ i $\bigvee\limits_y \bigwedge\limits_x \phi(x,y)$ mogą mieć różne wartosci logiczne (zmiana kolejności kwantyfikatorów różnych rodzajów może zmienić wartość logiczną wyniku)

     Przykład

     zdanie $\bigwedge\limits_x \bigvee\limits_y x < y$ jest prawdziwe, a

     zdanie $\bigvee\limits_y \bigwedge\limits_x x < y$ jest fałszywe, x, y są liczbami rzeczywistymi.

Dowód indukcyjny.

Metoda dowodu prawdziwości ciągu zdań $T(n_0), T(n_0+1), T(n_0+2), \ldots$.

1. Dowodzimy prawdziwości zdania $T(n_0)$

2. Dowodzimy prawdziwości implikacji $T(n) \Rightarrow T(n+1)$ dla wszystkich $n \geq n_0$

3. Jako wniosek, na mocy zasady indukcji otrzymujemy prawdziwość każdego zdania $T(n)$ dla $n \geq n_0$.

Przykład. Nierówność Bernoulliego

$$\bigwedge_{x \geq -1} \bigwedge_{n} (1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Dowód.

1. Dla $n = 1 : L = (1+x)^1 = 1 + x$, $P = 1 + nx = 1 + x$, stąd $L = P$

2. Niech $(1+x)^n \geq 1 + nx$. Wtedy

$$L = (1+x)^{n+1} = (1+x)^n(1+x) \overset{1}{\geq} (1+nx)(1+x) \geq$$
$$1 + (n+1)x + nx^2 \geq 1 + (n+1)x = P$$

$\overset{1}{\geq}$: skorzystaliśmy z założenia indukcyjnego i z faktu, że $1 + x \geq 0$.